Факультативный курс

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ

7-8

51(075)
Ф18

Н. Я. Виленкин, Р. С. Гутер,
А. Н. Земляков, И. Л. Никольская
Под редакцией *В. В. Фирсова*

Составители: *О. А. Боковнев, С. И. Шварцбурд*

Рекомендовано к изданию
Главным управлением школ МП СССР

Ф18 Факультативный курс. Избранные вопросы математики (7—8 кл.). М., «Просвещение», 1978. 192 с.

На обороте тит. л. авт. Н. Я. Виленкин, Р. С. Гутер, А. Н. Земляков, И. Л. Никольская. Под редакцией В. В. Фирсова. Составители: О. А. Боковнев, С. И. Шварцбурд.

Пособие написано в соответствии с новой программой факультативного курса. В каждом разделе изложение теоретического материала сопровождается набором задач для его закрепления.

Ф $\frac{\textbf{60601—861}}{\textbf{103(03)—78}}$ **инф. письмо — 78** **51(075)**

© Издательство «Просвещение», 1978 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Системы счисления и арифметические основы электронных вычислительных машин 6

Симметрия 32

Симметрия плоских фигур . . . . . —

Группы геометрических преобразований 63

Элементы математической логики 76

Логика высказываний . . . . . —

Высказывательные формы и операции над ними 102

Множества на координатной плоскости 128

Вывод уравнений линий по их геометрическим свойствам . . . . . —

Графики и геометрические преобразования 144

Построение графиков функций 157

Бесконечные множества 168

Ответы и указания 188

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является учебным пособием по факультативному курсу «Избранные вопросы математики» для VII—VIII классов средней школы. Этот курс вводится в школу взамен ранее существовавшего курса «Дополнительные главы и вопросы к систематическому курсу математики» в связи с завершением перехода на новые программы по математике. Содержание пособия соответствует программе факультативного курса, утвержденной Министерством просвещения СССР в 1977 г.

Целью курса «Избранные вопросы математики» является развитие интересов и склонностей учащихся к математике.

Программа курса состоит из ряда независимых разделов, так что изучение любой темы факультатива не предполагает изучения других тем. В силу этого факультативный курс «Избранные вопросы математики» может изучаться начиная с любой темы как в VII, так и VIII классах.

Выбор тем для преподавания производится учителем или преподавателем, ведущим факультативные занятия. При этом он руководствуется своими возможностями и потребностями своих учеников. Вместе с тем, начиная с VIII класса, программа факультатива предусматривает разбиение тем на «основные», которые рекомендуется изучать в первую очередь, и «дополнительные» темы по выбору учителя. Поэтому общее число включенных в программу тем избыточно; не предполагается, что в ходе обучения будут изучены все темы курса «Избранные вопросы математики».

В программу курса внесены наиболее важные в математическом плане вопросы, углубляющие основные направления курса математики. Каждая тема факультатива непосредственно связана с материалом основного курса. При этом программа предусматривает достижение двух целей: а) довести изучение материала до уровня, на котором учащемуся становится ясной его принципиальная математическая значимость, до известной степени завершенности; б) показать непосредственные выходы школьной математики в сферу серьезной науки и ее приложений. Предполагается, что в ходе занятий будут показаны история возникновения и развития ряда изучаемых методов, концепций и идей, их значение для математики и других наук и областей практической деятельности.

Материал курса ни в коей мере не дублирует вузовских программ, но позволяет с более общих позиций взглянуть на школьную математику и усмотреть единство предмета и метода математической науки. Поэтому существенно важно не развивать в обучении те специальные методы, приемы и навыки, которым обучают в вузах, не адаптировать вузовские занятия, но показать учащимся, как из материала школьного курса математики возникают общие концепции, обладающие теоретической и прикладной ценностью.

Весьма существенное место на факультативных занятиях по математике должно занимать решение задач. Предполагается, что изучение любой темы сопровождается решением значительного их числа. В настоящем пособии этих задач очень много. Как увидит читатель, среди них весьма значительное число почти традиционных школьных: задачи на доказательство в теме «Симметрия», уравнения и неравенства в теме «Элементы математической логики», графики функций и уравнений с двумя переменными в теме «Множества на координатной плоскости» и т. п.

Помимо этого, программа факультатива предусматривает обязательное выделение времени для решения задач повышенной трудности по общему курсу математики. Таким образом, задачи по общему курсу предлагается решать не только при изучении тем факультатива, но и специально отводить занятия, посвященные решению и обсуждению задач.

В настоящее пособие включены материалы не по всем разделам программы факультативного курса «Избранные вопросы математики», что связано с ограниченностью объема книги. Составители стремились включить в пособие прежде всего новый материал, в относительно меньшей степени знакомый учителю. Поэтому, например, в пособие не включена тема «Делимость и простые числа», с содержанием которой учитель хорошо знаком по статье В. Г. Болтянского и Г. Г. Левитаса в сборнике «Дополнительные главы к курсу математики по факультативному курсу для учащихся VII—VIII классов» (М., «Просвещение», 1974). Материал по теме «Логическое строение геометрии» изложен в учебном пособии «Геометрия» для VIII класса. Из числа дополнительных тем не удалось включить в настоящее пособие темы «Приложения теории графов» и «Алгоритмы и программирование». Однако издательство «Просвещение» выпустило и выпускает ряд пособий, пользуясь которыми можно будет организовать изучение этих тем.

Учитывая выход задачников по алгебре и геометрии в сериях издательства «Просвещение» («Методическая библиотека школы» и «Библиотека учителя математики»), в содержание настоящего пособия не включены также разделы, посвященные задачам повышенной трудности, содержание которых учитель отберет сам. Вместе с тем издательство «Просвещение» планирует выпустить соответствующие брошюры с условиями рекомендуемых задач.

Однако и в этом случае выбор задач для решения в классе — дело учителя, который знает своих учеников, их математическую подготовку.

В содержание разделов настоящего пособия включены (отмеченные звездочкой) пункты, изучение которых всеми учащимися не предполагается. Эти разделы предназначены для самостоятельного чтения, подготовки рефератов и докладов и т. п. Также не предполагается, что будут решены все приведенные в пособии задачи (среди них звездочкой отмечены более трудные). Авторы сознательно пошли на увеличение числа задач, преследуя цели методического порядка: возможность индивидуализации обучения, самостоятельной работы учащихся над задачами.

Готовится к изданию методическое пособие для учителя, в котором более подробно рассматриваются собственно вопросы методики преподавания. В этом пособии приводятся ответы к задачам и упражнениям, тогда как настоящее пособие снабжено лишь ответами и указаниями к избранным задачам. Кроме того, в методическом пособии приводятся примерные планы проведения занятий.

Значительную помощь авторам и редакторам оказали советы и замечания А. Н. Колмогорова, Ф. М. Барчуновой, А. Ю. Михайловской, К. С. Муравина и В. В. Щенникова. Всем им мы выражаем свою признательность.

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

1. Непозиционные и позиционные системы счисления. *Системой счисления* называют способ наименования и записи чисел. Употребляемые системы счисления делятся на *позиционные* и *непозиционные*. Мы начнем с рассмотрения непозиционных систем, ограничившись пока натуральными, т. е. целыми, положительными числами.

Первоначально натуральные числа изображались с помощью нужного количества черточек или палочек. Затем для их изображения стали использоваться буквы или специальные знаки.

Примером непозиционной системы счисления является пришедшая из Древнего Рима римская система, в которой числа изображались буквами латинского алфавита. В древнем Новгороде использовалась славянская система, где применялись буквы славянского алфавита; при изображении чисел над ними ставился знак ~ (титло).

Характерной чертой римской системы счисления является то, что в ней определенные буквы всегда означают одни и те же числа. Так, буква I всегда означает единицу, буква V — пять, X — десять, L — пятьдесят, C — сто, D — пятьсот, M — тысячу. Число 1678, например, запишется в римской системе в виде MDCLXXVIII. Из этого примера видно, что значения написанных рядом букв при изображении числа складываются. Впрочем, чтобы уменьшить число требующихся знаков, в римской системе было введено дополнительное правило: помещение меньшего числа слева от большего означает вычитание вместо сложения; так, IV означает четыре, IX — девять, XL — сорок и т. д.

В славянской системе нумерации для записи чисел использовались все буквы алфавита, правда, с некоторым нарушением алфавитного порядка. Различные буквы означали различное количество единиц, десятков и сотен. Например, число 231 в славянской системе записывалось в виде $\widetilde{\text{СЛА}}$ (С означало двести, Л — тридцать, А — единицу, а титло можно было ставить только над одной буквой). Тысячи обозначались теми же буквами, но при этом впереди ставился знак .

Непозиционным системам свойственны два недостатка, которые привели к их вытеснению позиционными: необходимость большого числа различных знаков, особенно для изображения больших чисел, и, что еще важнее, неудобство выполнения ариф-

метических операций. В последнем читатель легко убедится сам, попробовав перемножить числа CCLXIII и DCXLIV, пользуясь римской системой счисления. По этим причинам римская система применяется сейчас только в тех редких случаях, когда приходится иметь дело с небольшими числами, над которыми к тому же не требуется выполнять арифметические действия, например при нумерации частей или глав в книге, столетий и т. п.

Общепринятой и наиболее распространенной является *десятичная позиционная система счисления,* которая была изобретена в Индии, заимствована там арабами и затем через страны Ближнего Востока, Средней Азии и Северной Африки пришла в Европу. В этой, как и в любой другой, позиционной системе счисления значение каждой цифры определяется как ею самой, так и местом (позицией), которое она занимает в записи числа.

Например, цифра 1 означает единицу. Ту же единицу она означает и в числе 231 и в числе 0001[1], поскольку во всех случаях цифра 1 стоит на первом месте справа. Но уже в числе 12 цифра 1 означает не единицу, а десять, а, переместившись на третье место, в числе 100 означает уже сто.

Характерной чертой всякой позиционной системы является то, что число в ней выражается в виде суммы разрядных единиц и любая цифра означает соответствующее количество единиц того именно разряда, в котором эта цифра стоит. Запись 231 означает, таким образом, что число состоит из двух сотен, трех десятков и одной единицы, $231 = 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 1$.

Единицы соседних разрядов находятся в определенном постоянном отношении между собой. Это отношение называют *основанием* системы счисления. Для нашей системы основанием является число десять, что и определило название системы — *десятичная.* Запись числа в десятичной системе счисления означает его представление в виде суммы целых степеней десятки, взятых с некоторыми коэффициентами. Например, запись 243078 в десятичной системе означает равенство

$$243\,078 = 2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0.$$

Правая часть написанного равенства по внешнему виду напоминает запись многочлена в стандартном виде. Обозначив основание 10 какой-либо буквой, например d, мы можем написать

$$243\,078 = 2d^5 + 4d^4 + 3d^3 + 0d^2 + 7d + 8.$$

Используемая нами запись числа есть сокращенная запись этого многочлена: записываются только его коэффициенты. Степень основания, соответствующая данному коэффициенту, определяется его местом. Поэтому, в частности, нули в такой записи

[1] Запись целых чисел с нулями впереди применяется в тех случаях, когда для изображения числа отводится определенное число разрядов. Так выглядят показания счетчиков, номера денежных купюр, трамвайных и автобусных билетов, лотерейных билетов и т. п.

необходимы, чтобы каждый коэффициент находился на нужном месте.

Сложение многозначных чисел в позиционной системе счисления сводится к сложению однозначных и возможному переносу из младшего разряда в старший. Рассмотрим в качестве примера сложение:

$$\begin{array}{r} 732514 \\ +\ 63982 \\ \hline 796496 \end{array}$$

Складывая отдельно единицы и десятки слагаемых, мы сразу получаем цифры единиц и десятков суммы: $4+2=6$, $1+8=9$. При сложении сотен получаем $5+9=14$. Но 14 сотен — это четыре сотни и одна единица старшего разряда — тысяча. Поэтому «четыре пишем и один в уме». Эта единица «в уме» учитывается при сложении в следующем разряде.

Таким же правилам подчиняется и вычитание многозначных чисел, с той лишь разницей, что здесь может потребоваться перенос из старшего разряда в младший, если в каком-либо разряде вычитаемое окажется больше уменьшаемого.

Умножение многозначных чисел «столбиком» также сводится в конечном счете к умножению однозначных и последующему сложению. Однако здесь много промежуточных этапов, так что мы остановимся на этом действии более подробно.

Прежде всего, умножение на многозначное число приводится к умножению на однозначное и на «круглые» числа (записываемые одной цифрой и нулями). Так, например, для умножения некоторого числа на 2375 надо умножить это число на 5, на 70, на 300 и на 2000. Для умножения числа на «круглое» достаточно умножить его на однозначное и приписать справа нужное число нулей. (При умножении «столбиком» мы этих нулей не пишем, сдвигая лишь произведение на соответствующее число разрядов влево.) Таким образом, умножение многозначного числа на многозначное сводится к его умножению на несколько однозначных.

В свою очередь, умножение многозначного числа на однозначное сводится к умножению на это однозначное однозначного числа и нескольких круглых; например, при умножении 684 на какой-либо множитель надо умножить на этот множитель число 4, затем 80 и 600. В конечном счете и получается, что надо перемножить лишь однозначные числа. Поэтому большую роль играет известная таблица умножения, содержащая всевозможные попарные произведения однозначных чисел друг на друга.

2. Позиционные системы с произвольным основанием. Основанием системы счисления может служить любое натуральное число.

В Древнем Вавилоне, например, применялась *шестидесятеричная* система счисления. Остатки ее мы находим в сохранив-

шемся до сих пор делении часа или градуса на 60 минут, а минуты — на 60 секунд.

Широкое распространение имела в древности и *двенадцатеричная* система, происхождение которой, вероятно, связано, как и десятичной системы, со счетом на пальцах: за единицу счета принимались фаланги (отдельные суставы) четырех пальцев одной руки, которые при счете перебирались большим пальцем той же руки. Остатки двенадцатеричной системы счисления сохранились до наших дней и в устной речи, и в обычаях. Хорошо известно, например, название единицы второго разряда в двенадцатеричной системе — числа двенадцать — дюжина. Сохранился обычай считать многие предметы не десятками, а дюжинами, например столовые приборы в сервизе или стулья в мебельном гарнитуре (вспомните знаменитые «Двенадцать стульев» И. Ильфа и Е. Петрова).

Название единицы третьего разряда в двенадцатеричной системе — гросс — встречается теперь редко, но в торговой практике начала столетия оно бытовало и еще пятьдесят лет назад его можно было легко встретить. Например, в написанном в 1928 году стихотворении «Плюшкин» В. В. Маяковский, высмеивая мещан, скупающих подряд все нужное и ненужное, писал:

«...укупил
двенадцать гроссов
дирижерских палочек».

У ряда африканских племен и в Древнем Китае была употребительна *пятеричная* система счисления. В Центральной Америке (у древних ацтеков и майя) и среди населявших Западную Европу древних кельтов была распространена *двадцатеричная* система. Все они также связаны со счетом на пальцах.

В любой позиционной системе счисления основание записывается в виде 10, поскольку оно есть единица второго разряда. Все натуральные числа, меньшие основания, являются однозначными и должны изображаться разными знаками. Поэтому **количество цифр, используемых в данной позиционной системе, совпадает с основанием системы.** Иными словами, в позиционной системе с основанием n должно быть ровно n различных цифр. Действительно, натуральных чисел, меньших n, существует ровно $n - 1$. Кроме того, необходим еще знак для изображения нуля.

Для систем с основанием, меньшим десяти, можно пользоваться теми же цифрами, что и в десятичной системе. Однако при этом необходимо указывать, в какой именно системе записано число. Мы будем указывать основание системы счисления мелким шрифтом внизу справа от числа, в виде индекса. Само основание во всех случаях пишется в десятичной системе.

Так, в позиционной системе с основанием *семь* требуется семь цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Число семь, как основание системы, запишется в виде 10_7. Число десять будет в семеричной системе

иметь вид 13, а десятичное число 49, равное квадрату основания, запишется уже в виде 100_7.

В *двенадцатеричной* системе потребуется уже двенадцать цифр. Мы можем использовать цифры десятичной системы, но, кроме них, потребуется еще две цифры — для обозначения чисел десять и одиннадцать, которые здесь являются однозначными, так как они меньше основания. Приняв для них обозначения, скажем $\overline{0}$ и $\overline{1}$, мы получаем полный комплект двенадцати цифр, позволяющий записать любое целое число в двенадцатеричной системе, например: $17_{10} = 15_{12}$ и $22_{10} = 1\overline{0}_{12}$.

Позиционные системы с различными основаниями используются для изучения свойств целых чисел, например для получения признаков делимости. Но этим роль недесятичных систем счисления отнюдь не исчерпывается. Оказывается, с принятой системой счисления тесно связаны проблемы конструкции цифровых вычислительных машин. Остановимся на этом вопросе несколько подробнее. Простейшим цифровым вычислительным устройством являются известные русские счеты (рис. 1). В них число изображается при помощи надетых на спицы косточек. Каждая спица соответствует разряду числа, и цифра в этом разряде определяется числом опущенных косточек. Десятичная система требует десяти различных цифр, так что спица должна иметь десять различных состояний, для чего на нее надевают десять косточек.

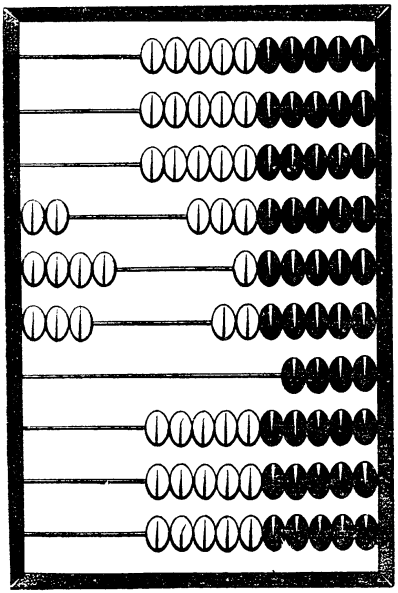


Рис. 1

Другим примером цифровой вычислительной машины является арифмометр (рис. 2). Здесь для изображения различных цифр в каждом разряде используется зубчатое колесо, имеющее десять зубцов. Поворачиваясь вокруг своей оси, оно может останавливаться только в таких положениях, когда какой-либо зубец, на котором написана соответствующая цифра, устанавливается против окошка в корпусе арифмометра.

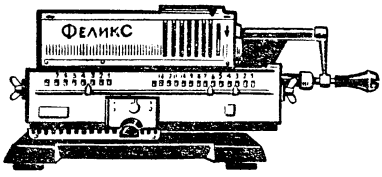


Рис. 2

У некоторых вычислительных машин для изображения числа используются специальные ступенчатые валики; на каждом валике размещается десять ступенек,

Таким образом, **принятая для записи чисел позиционная система счисления предъявляет свои требования к конструкции вычислительных машин и устройств.** Чтобы изображать число в десятичной системе счисления, имеющей десять различных цифр, необходимо применять элементы, каждый из которых обладает десятью различными устойчивыми состояниями. Именно этим и объясняется то, что на спицу счетов надевают десять косточек, колеса арифмометра снабжают десятью зубцами, а ступенчатый валик — десятью ступеньками.

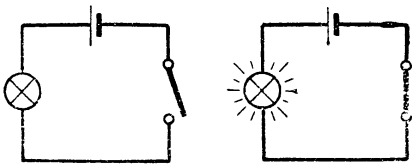


Рис. 3

Впрочем, пока мы имеем дело с механическими элементами описанного или аналогичного им типа, удовлетворить требованиям системы счисления очень легко. В самом деле, ничуть не труднее надеть на спицу восемь или двенадцать косточек, как это потребовалось бы для восьмеричной или двенадцатеричной системы, или сделать требуемое число зубцов на колесе или ступенек на валике.

Но совсем иначе будет обстоять дело, если понадобится применять элементы другого типа — электромеханические или электронные. Конечно, и здесь можно приспособиться к десятичной системе, изображая, например, цифру соответствующим числом электрических импульсов, посылаемых по проводнику, или же одним импульсом, посылаемым по одному из десяти проводников, отведенных для данного разряда. Можно скомбинировать и другие элементы с десятью различными состояниями. Однако для электромеханических или электронных элементов обычно бывает характерно наличие д в у х различных естественных устойчивых состояний. Например, выключатель или электромеханическое реле могут быть разомкнуты или замкнуты (рис. 3), конденсатор может быть заряжен или разряжен, электронная лампа или полупроводниковый триод могут проводить или не проводить ток.

Применение таких элементов в вычислительных машинах оказывается наиболее выгодным и удобным тогда, когда их не требуется комбинировать между собой для создания элементов с большим числом состояний, а можно использовать непосредственно. Поэтому надо применять такую систему счисления, в которой требуются только две различные цифры. Такой является позиционная система счисления с основанием два, которую называют *двоичной* системой.

Кроме сказанного выше, двоичная система обладает еще целым рядом важных качеств, делающих ее очень выгодной для использования в вычислительных машинах. По этим причинам мы посвятили изучению двоичной системы специальный пункт. Но до этого нужно более подробно познакомиться с арифметическими операциями в позиционных системах счисления и перево-

дом чисел из одной системы в другую. Этому будут посвящены другие пункты.

Упражнения

1. Запишите в десятичной системе числа 10_5, 100_5, 1000_5, 10000_5.

2. Как записывается в двенадцатеричной системе дюжина, гросс и дюжина гроссов?

3. В какой системе счисления справедливо равенство $10 \cdot 10 = 100$? $3 + 5 = 10$?

4. Существует ли система счисления, в которой одновременно $4 + 5 = 10$ и $4 \times 5 = 22$? $2 + 3 = 5$ и $2 \times 3 = 11$? $3 + 4 = 7$ и $3 \times 4 = 11$?

5. Назовем круглыми все числа, записываемые одной цифрой и несколькими (быть может, одним) нулями. Выпишите все двузначные и трехзначные круглые числа в пятеричной и семеричной системах счисления и переведите их в десятичную систему.

6. Каким свойством должно обладать десятичное число, чтобы после перевода его в шестеричную систему счисления оно было круглым?

7*. Ответьте на предыдущий вопрос для позиционной системы с произвольным натуральным основанием n.

8. Как различать четные и нечетные числа по их записи в троичной системе счисления?

9*. Сформулируйте условие, позволяющее определить четность числа по его записи в системе счисления с основанием n.

3. Арифметические действия в позиционных системах счисления. Перевод натуральных чисел из одной системы в другую. Арифметические действия в любой позиционной системе счисления сводятся к действиям над однозначными числами таким же образом, как и в десятичной системе. Рассмотрим в качестве примера сложение четырехзначных чисел в восьмеричной системе $2514_8 + 3621_8$, записав их привычным столбиком:

$$\begin{array}{r} 2514 \\ +\ 3621 \\ \hline 6335 \end{array}$$

Складывая единицы двух младших разрядов, сразу получаем $4 + 1 = 5$ и $1 + 2 = 3$. В третьем разряде сумма выходит уже за пределы этого разряда. В восьмеричной системе $5_8 + 6_8 = 13_8$, так что в этом разряде остается 3, и 1 переносится в старший разряд. Таким образом, для того чтобы уметь складывать (и вычитать) в восьмеричной системе, достаточно знать *таблицу сложения*, содержащую суммы всевозможных пар однозначных чисел. Читатель легко составит ее самостоятельно, например, складывая соответствующие числа в десятичной системе и переводя

затем сумму в восьмеричную. Вычитание достаточно пояснить примером:

$$\begin{array}{r} -6314 \\ 2531 \\ \hline 3563 \end{array}$$

Такие же точно правила действуют в любой позиционной системе счисления, только «таблица сложения» выглядит каждый раз по-иному. Например, в двенадцатеричной системе $267 + 5\bar{0}4 = 84\bar{1}$ и $936 - 568 = 38\bar{0}$ (проверяя эти вычисления, надо вспомнить смысл обозначений $\bar{0}$ и $\bar{1}$, введенных в п. 2).

Умножение, очевидно, требует знания таблицы умножения в соответствующей системе счисления, содержащей произведения однозначных чисел. Эти произведения в различных системах выглядят по-разному, хотя числа, в них участвующие, остаются теми же. Произведение 3×5 есть вполне определенное, единственное число, которое однозначно определяется своими сомножителями и не зависит ни от чего другого. Все дело лишь в том, что это число в различных системах счисления записывается различными цифрами; например, в десятичной системе счисления $3 \times 5 = 15$, тогда как в восьмеричной $3 \times 5 = 17$, а в двенадцатеричной $3 \times 5 = 13$. Тем не менее, поскольку справедливо равенство $17_8 = 15_{10} = 13_{12}$, во всех трех случаях речь идет об одном и том же числе.

Составить таблицу умножения не составит большого труда, и мы предоставим это читателям. В качестве примера и для проверки приведем два столбца из таблицы умножения в восьмеричной системе:

$5 \times 1 = 5$	$6 \times 1 = 6$
$5 \times 2 = 12$	$6 \times 2 = 14$
$5 \times 3 = 17$	$6 \times 3 = 22$
$5 \times 4 = 24$	$6 \times 4 = 30$
$5 \times 5 = 31$	$6 \times 5 = 36$
$5 \times 6 = 36$	$6 \times 6 = 44$
$5 \times 7 = 43$	$6 \times 7 = 52$

Пользуясь таблицей умножения (разумеется, полной), мы можем выполнять умножение и деление многозначных чисел в восьмеричной системе, как это показано в приведенных ниже примерах.

$$\begin{array}{r} \times\ 42307 \\ 615 \\ \hline 253743 \\ 42307 \\ 316252 \\ \hline 32524233 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 732122 & 156 \\ \hline 670 & 4237 \\ \hline 421 & \\ 334 & \\ \hline 652 & \\ 512 & \\ \hline 1402 & \\ 1402 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Рассмотрим теперь вопрос о *переводе* натуральных чисел из одной системы счисления в другую. Как уже говорилось, запись числа в десятичной системе означает представление этого числа в виде суммы степеней десяти с различными коэффициентами, которые и служат цифрами числа. Аналогичное положение справедливо для любой позиционной системы: запись целого числа в позиционной системе счисления означает представление этого числа в виде суммы степеней основания с коэффициентами, меньшими основания. Эти коэффициенты и являются цифрами числа.

Сказанное можно использовать для перевода целого числа из недесятичной позиционной системы в десятичную. Пусть, например, дано восьмеричное число 3564. Эта запись означает, что число представляется суммой:

$$3564_8 = 3 \times 10_8^3 + 5 \times 10_8^2 + 6 \times 10_8^1 + 4 \times 10_8^0.$$

Но $10_8 = 8_{10}$, поэтому наше равенство можно переписать с десятичными числами:

$$3564_8 = 3 \times 8^3 + 5 \times 8^2 + 6 \times 8 + 4 = 1536_{10} + 320_{10} + \\ + 48_{10} + 4 = 1908_{10}.$$

Так же можно действовать при переводе из любой недесятичной системы в десятичную, например:

$$23401_5 = 2 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0 = 1726_{10}.$$

Это же соображение может быть использовано и для обратного перевода чисел из десятичной системы в любую недесятичную. Действительно, возьмем, например, десятичное число 2937 и попробуем перевести его в восьмеричную систему. Как известно,

$$2937 = 2 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0.$$

Но при переходе к восьмеричной системе $10_{10} = 12_8$ и $9_{10} = 11_8$. Поэтому

$$2937_{10} = 2 \times 12_8^3 + 11_8 \times 12_8^2 + 3 \times 12_8 + 7 = 2 \times 1750_8 + \\ + 11_8 \times 144_8 + 3 \times 12_8 + 7 = 5571_8.$$

Использованный прием имеет один, но весьма существенный недостаток: для перевода числа из десятичной системы в восьмеричную пришлось выполнять арифметические операции в восьмеричной системе, что, во всяком случае, менее привычно, чем в десятичной.

Можно предложить способ перевода, использующий операции в десятичной системе и основанный на подборе. Сравним заданное число 2937_{10} с различными степенями нового основания: $8^2 = 64$, $8^3 = 512$, $8^4 = 4096$. Так как $2937 < 8^4$, то ясно, что заданное число не может содержать более высокой степени 8, чем 8^3. Легко проверить, что

$$2937 = 5 \times 8^3 + 377$$

(множитель 5 находится либо сравнением числа 2937 с кратными 512, либо делением заданного числа на 512).

Таким же путем найдем, что $377 = 5 \times 8^2 + 57$, откуда

$$2937 = 5 \times 8^3 + 5 \times 8^2 + 57,$$

или, окончательно,

$$2937 = 5 \times 8^3 + 5 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 1,$$

что и дает восьмеричную запись 5571_8.

Другой порядок вычислений, основанный практически на той же идее, позволяет обойтись без подбора, требующего предварительного вычисления степеней основания. Рассмотрим снова то же число 2937 и разделим его на новое основание 8. Получим в частном 367 и в остатке 1, т. е.

$$2937 = 367 \times 8 + 1.$$

Полученное равенство показывает, что заданное число, кроме некоторого целого количества оснований системы (восьмерок), содержит еще одну единицу; следовательно, последняя цифра восьмеричной записи числа есть 1. Для определения следующей (второй справа) цифры разделим полученное частное 367 снова на 8. Найдем, что $367 = 45 \times 8 + 7$, откуда

$$2937 = 45 \times 8^2 + 7 \times 8 + 1.$$

Остается разделить 45 на 8, что приводит к равенству

$$2937 = 5 \times 8^3 + 5 \times 8^2 + 7 \times 8 + 1$$

и снова дает уже известное представление: $2937_{10} = 5571_8$.

Итак, мы приходим к правилу: цифрами, представляющими целое число в восьмеричной системе, будут остатки от последовательного деления этого числа на 8, записанные в обратном порядке. Легко убедиться в том, что это правило остается в силе при переводе десятичного числа в любую другую позиционную систему, если в качестве делителя взять основание той системы счисления, в которую число требуется перевести.

Вычисления удобно располагать так, как показано в следующем примере перевода в восьмеричную систему числа 18594_{10}:

18594	8			
25	2324	8		
19	72	290	8	
34	4	50	36	8
2		2	4	4

Таким образом, $18594_{10} = 44242_8$.

Упражнения

10. Запишите в десятичной системе числа 10_8, 100_8, 1000_8, $10\,000_8$.

11. Переведите в десятичную систему числа 12_8, 144_8, 1750_8, 23420_8.

12. Составьте таблицы сложения и умножения в пятеричной системе.

13. Составьте таблицу сложения в восьмеричной системе.

14. Составьте полную таблицу умножения в восьмеричной системе.

15. Выполните указанные арифметические действия в пятеричной системе:

а) $314 + 232$; б) $2431 - 1302$; в) 42×31; г) $404401 : 113$.

16. Выполните указанные арифметические действия в восьмеричной системе:

а) $4312 + 2767$; б) $6714 - 3505$; в) 27×72; г) $5250 : 76$;
д) $(364 + 207) \times 12 + (4301 - 613) : 32$.

17. Переведите в десятичную систему числа 6754_8, 5021_8, 3270_8.

18. Переведите в восьмеричную систему десятичные числа 8125, 6378, 4907.

19. Переведите все числа, встречающиеся в упражнении 16, в десятичную систему счисления и проверьте правильность выполненных там действий в десятичной системе.

4. Систематические дроби. Перевод дробей в различные системы счисления. Как известно, десятичной дробью называют такую дробь, знаменатель которой есть степень десяти. Десятичная дробь отличается по внешнему виду от целого числа только наличием запятой, отделяющей целую часть от дробной, и правила арифметических действий с десятичными дробями отличаются лишь дополнительными указаниями относительно места запятой.

Такое сходство не случайно. Дело в том, что обычная запись десятичной дроби (меньшей единицы) означает ее представление в виде суммы степеней числа, обратного основанию, т. е. $\frac{1}{10}$.

Например, запись 0,5634 означает:

$$0{,}5634 = 5 \times \left(\frac{1}{10}\right)^1 + 6 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + 4 \times \left(\frac{1}{10}\right)^4.$$

Как и для целых чисел, цифры играют роль коэффициентов.

Можно сказать, что запись дробного числа в виде десятичной дроби представляет собой перенесение общего принципа записи чисел в позиционной десятичной системе счисления на дробные числа. В самом общем случае смешанное число, содержащее целую и дробную части, представляется в виде суммы степеней 10 и $\frac{1}{10}$, например:

$$6238{,}754 = 6 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + 7 \times \left(\frac{1}{10}\right)^1 + 5 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3.$$

Для тех, кто знаком с понятием отрицательного показателя

степени и знает, что $\frac{1}{10} = 10^{-1}$, эту запись можно сделать еще более естественной, а именно:

$$6238{,}754 = 6 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + \\ + 5 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3}.$$

Десятичные дроби тесно связаны с десятичной системой счисления и являются частным случаем *систематических дробей,* которые можно строить аналогичным образом для любой позиционной системы счисления. Например, дробь

$$5 \times \left(\frac{1}{8}\right)^1 + 6 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{8}\right)^3 + 4 \times \left(\frac{1}{8}\right)^4$$

естественно называть *восьмеричной* дробью и записывать в виде $0{,}5634_8$.

Правила арифметических действий над восьмеричными дробями такие же, как и над десятичными, но при действиях с однозначными числами нужно пользоваться не десятичными, а восьмеричными таблицами сложения и умножения. Ясно, что эти же действия распространяются и на смешанные числа, имеющие целую и дробную части. Приведем два примера действий с восьмеричными дробями:

$$\begin{array}{r} 3{,}2645 \\ +\ 0{,}1734 \\ \hline 3{,}4601 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}756 \\ \times\ 0{,}12 \\ \hline 1734 \\ 756 \\ \hline 0{,}11514 \end{array}$$

Известно, что не всякая простая дробь может быть записана в виде конечной десятичной дроби, например: $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$ Пользуясь десятичными дробями при вычислениях, мы вынуждены такую бесконечную дробь обрывать и заменять конечной, выражающей данное число лишь приближенно.

Такое же явление наблюдается и в других позиционных системах счисления. При этом одно и то же число может в одной системе счисления записываться в виде конечной дроби, а в другой — в виде бесконечной, и наоборот. Так, например, в десятичной системе счисления имеем:

$$\frac{1}{5} = 0{,}2_{10}, \qquad \frac{1}{6} = 0{,}1666\ \ldots_{10},$$

а в двенадцатеричной —

$$\frac{1}{5} = 0{,}2497\ 2497\ 2497\ \ldots_{12}, \quad \frac{1}{6} = 0{,}2_{12}.$$

В то же время в обеих системах

$$\frac{1}{4} = 0{,}25_{10} = 0{,}3_{12}$$

и

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857\ \ldots_{10} = 0{,}18\overline{6035}\ 18\overline{6035}\ \ldots_{12}.$$

При переводе дробей из одной позиционной системы счисления в другую необходимо иметь в виду возможность получения бесконечных дробей.

Для перевода систематической дроби из произвольной системы счисления в десятичную можно, как и для целых чисел, воспользоваться представлением систематической дроби в виде суммы. Например, для восьмеричной дроби

$$0{,}1725_8 = 1 \times \left(\frac{1}{8}\right) + 7 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{8}\right)^3 + 5 \times \left(\frac{1}{8}\right)^4;$$

но так как $\frac{1}{8} = 0{,}125_{10}$, то из этого равенства следует:

$$0{,}1725_8 = 1 \times 0{,}125_{10} + 7 \times 0{,}125_{10}^2 + 2 \times 0{,}125_{10}^3 + \\ + 5 \times 0{,}125_{10}^4 = 0{,}239501953125_{10}.$$

Обратный перевод, основанный на той же идее, оказывается весьма затруднительным не только потому, что придется выполнять вычисления в восьмеричной системе, но еще и потому, что число $0{,}1_{10}$ не выражается конечной восьмеричной дробью. Как и для целых чисел, здесь можно предложить простой метод, при котором арифметические операции выполняются в десятичной системе.

Пусть дана некоторая десятичная дробь (меньшая единицы), например 0,462890625, которую нужно перевести в восьмеричную систему. Чтобы найти первую после запятой цифру этого числа, надо знать, сколько восьмых в нем содержится. Для этого можно предварительно умножить данное число на восемь и узнать, сколько целых содержится в полученном произведении.

Так как $0{,}462890625 \times 8 = 3{,}703125$, то целая часть содержит 3 единицы; стало быть, первоначальная дробь содержит три восьмых. Иначе говоря, первой после запятой восьмеричной цифрой является 3. Следующую цифру можно получить таким же путем: вычтя из полученного произведения число 3, умножим оставшееся на 8:

$$0{,}703125 \times 8 = 5{,}625.$$

Выполненная операция соответствует вычитанию из исходной дроби трех восьмых и умножению разности на 64. Полученный результат показывает, что следующая восьмеричная цифра числа будет 5. Последняя цифра получается так же:

$$0{,}625 \times 8 = 5{,}000.$$

Мы получили конечную восьмеричную дробь

$$0{,}355_8 = 0{,}462890625_{10}.$$

Приведенный пример был подобран так, чтобы получилась конечная восьмеричная дробь.

На практике нередко может получиться бесконечная восьмеричная дробь. Например, обращая $0{,}175_{10}$ в восьмеричную дробь, получим бесконечную периодическую дробь:

$$0{,}175_{10} = 0{,}1\,3146\,3146\ldots_8.$$

Сформулируем общее правило: **для перевода целого числа в систему счисления с основанием n его надо последовательно делить на n (отбрасывая остатки), а при переводе дроби, меньшей единицы,— последовательно умножать на n (отбрасывая целые). Цифрами числа в n-ичной системе счисления в первом случае будут последовательные остатки, записанные в обратном порядке, а во втором — целые части, записанные в порядке их получения.**

Если число является смешанным, то целую и дробную части надо переводить в другую систему счисления отдельно. Например, если требуется перевести в восьмеричную систему десятичное число $378{,}8359375_{10}$, то нужно выполнить следующие действия:

$$\begin{array}{r|l} 378 & 8 \\ \hline 58 & 47 \quad \big|\,8 \\ \hline 2 & 7 \qquad 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}8359375 \\ \times\ 8 \\ \hline 6{,}6875000 \\ \times\ 8 \\ \hline 5{,}5000 \\ 8 \\ \hline 4{,}0 \end{array}$$

т. е.

$$378{,}8359375_{10} = 572{,}654_8.$$

Упражнения

20. Переведите в десятичную систему дроби $0{,}11011_2$; $0{,}31_4$; $0{,}234_5$.

21. Переведите в десятичную систему дроби $0{,}625_8$; $0{,}777_8$; $0{,}404_8$.

22. Переведите в восьмеричную систему счисления десятичные числа 0,828125; 0,953125; 1,453125; 13,8046875; 425,53125; 987,90625.

23. Докажите, что всякая конечная восьмеричная дробь при переводе в десятичную систему останется конечной. Верно ли обратное?

24. Каким условиям должны удовлетворять дроби, которые записываются в виде конечной десятичной? Конечной восьмеричной?

25*. Ответьте на тот же вопрос для произвольной позиционной системы счисления с основанием n.

5. Двоичная система счисления. Двоичная арифметика. Двоичная система счисления есть позиционная система с основанием

два. Для изображения чисел в этой системе требуется лишь две цифры: 0 и 1. По этой причине двоичную запись числа легко представить, пользуясь физическими элементами, которые имеют два различных устойчивых состояния. Именно это и послужило одной из важных причин широкого использования двоичной системы счисления в современных электронных вычислительных машинах. О других причинах мы скажем позже.

Основание двоичной системы, число два, изображается в этой системе как 10. Прибавляя к этому числу единицу, мы получаем 11, что представляет двоичную запись числа 3. Прибавляя еще единицу, мы должны будем сделать перенос во второй, а затем и в третий разряд, что дает двоичное изображение числа четыре — 100, единицы третьего разряда, квадрата основания.

Выражение первых чисел натурального ряда в двоичной системе показано в таблице:

Десятичные числа	Двоичные числа	Десятичные числа	Двоичные числа
1	1	13	1101
2	10	14	1110
3	11	15	1111
4	100	16	10000
5	101	17	10001
6	110	18	10010
7	111	19	10011
8	1000	20	10100
9	1001	25	11001
10	1010	50	110010
11	1011	100	1100100
12	1100	200	11001000

Из этой таблицы видно, что запись числа в двоичной системе примерно в три раза длиннее, чем в десятичной; поэтому при ручном счете двоичная система неудобна и невыгодна. Другим ее недостатком является однообразие, что увеличивает вероятность описки или ошибки при прочтении.

Может показаться, что требование большего числа разрядов увеличивает количество требуемого машинного оборудования. Но это не так. Для машины существенно не количество разрядов,

а общее количество устойчивых состояний всех элементов, используемых для изображения числа. В этом отношении двоичная система оказывается более экономной, чем десятичная, и это еще одна причина ее применения.

Для изображения целых чисел от 1 до 999 в десятичной системе требуется три разряда по десять состояний в каждом; общее число различных состояний равно тридцати. В двоичной системе для тех же чисел требуется десять разрядов ($999_{10}=1111100111_2$), но по два состояния в каждом, поэтому общее число требуемых различных состояний равно двадцати.

Существует еще более экономичная в этом отношении позиционная система — троичная. Если для записи чисел от 1 до 10^9 в десятичной системе требуется 90 различных состояний, а в двоичной — 60, то в троичной системе достаточно лишь 57 состояний.

Троичная система не получила широкого распространения вследствие трудностей осуществления надежных физических элементов с тремя устойчивыми состояниями. Но машины, работающие в троичной системе, имеются, например электронная машина «Сетунь», сконструированная и построенная в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова.

Арифметические действия в двоичной системе выполняются по правилам, общим для всех позиционных систем. Таблица сложения однозначных чисел в двоичной системе выглядит так:

$$0+0=0; \quad 0+1=1+0=1; \quad 1+1=10.$$

(В этой таблице необычно выглядит лишь последняя запись, поэтому таблицу легко запомнить.) Пользуясь этой таблицей, выполняют сложение и вычитание многозначных чисел в двоичной системе. При этом, если слагаемых много, в некоторых разрядах может оказаться несколько единиц переноса. Их удобно выписывать над слагаемыми (а не держать «в уме»), как это показано в приведенном ниже примере.

$$\begin{array}{rr}
 & 111 \\
 & 11111111111111 \\
 & 1111111111111111 \\
\hline
+ & 1011100111{,}01101 \\
 & 10111101{,}11110 \\
 & 111101111{,}01111 \\
 & 100100111{,}10011 \\
\hline
 & 11010111100{,}01101
\end{array}$$

Таблица умножения в двоичной системе предельно проста: если не выписывать умножений на нуль, всегда дающих нулевой результат, то от нее останется лишь одна строка:

$$1 \times 1 = 1.$$

Но умножение на 1 не изменяет числа. Поэтому в двоичной системе умножение многозначных чисел сводится лишь к сдвигу и

сложению. Эта простота осуществления арифметических операций в двоичной системе послужила еще одной важной причиной ее использования в современных вычислительных машинах.

Удобство двоичной системы для выполнения арифметических операций было отмечено уже известным математиком XVI—XVII веков, изобретателем логарифмов — Джоном Непером. В изданной им в 1617 году книге «Рабдология» описана специальная «счетная доска», применяемая для облегчения операций умножения и деления многозначных чисел, возведения в квадрат и извлечения квадратного корня, основанная на применении для этой цели двоичной системы счисления.

Вот как выглядит умножение многозначных чисел в двоичной системе:

```
          1111001011
      ×      1110101
 ------------------
  1111111111
 1111111111111
 ------------------------
          1111001011
         1111001011
        1111001011
       1111001011
      1111001011
 ------------------------
 110111101111000111
```

Промежуток между сомножителями и частичными произведениями отведен для записи единиц переноса. Вычитание и делений [1], удобно делилось на триады; поэтому удобно было поль-

```
 1111000110      1011001100101     |1101
   10110101       1101             |-------
 ----------      ------            110111001
 1100010001       10010
                   1101
                  -----
                   10111
                    1101
                  -----
                    10100
                     1101
                   -----
                      1110
                      1101
                    -----
                        1101
                        1101
                    -----
                          0
```

С помощью специального приема вычитание можно упростить, сведя его к сложению. Для этого пользуются понятием *двоичного дополнения*.

Двоичным дополнением данного положительного двоичного числа называют такое положительное двоичное число, которое, будучи сложено с данным, дает в сумме число, равное единице

некоторого разряда. Например, для числа 101 двоичным дополнением будет 11, так как $101 + 11 = 1000$. Для числа 1111 двоичным дополнением будет 1, так как $1111 + 1 = 10\,000$, а для числа 1011101 — число 100011, поскольку

$$\begin{array}{r} 1011101 \\ +\ 100011 \\ \hline 10000000 \end{array}$$

Двоичное дополнение аналогично дополнению до круглого числа, которым мы пользуемся при устных действиях в десятичной системе счисления. Например, если нужно произвести вычитание 524 — 87, то можно выполнять его так:

$$524 - (100 - 13) = 524 + 13 - 100 = 537 - 100 = 437,$$

что много проще, чем непосредственное вычитание числа 87. Число 13 является здесь десятичным дополнением 87 до «совсем круглого» числа 100, с которым легко производить действия.

Приведенное нами определение двоичного дополнения является неполным и потому не определяет его однозначно. Согласно этому определению за двоичное дополнение числа 101 можно принять 11, поскольку $101 + 11 = 1000$, но можно также принять и 1111011. Действительно, $101 + 1111011 = 10000000$.

Однозначно определить двоичное дополнение можно одним из двух следующих способов: либо рассматривать дополнение всякий раз до ближайшего круглого числа, как мы это делали в приведенных выше примерах, либо фиксировать заранее некоторое определенное число разрядов. Мы будем пока действовать первым способом.

Десятичное дополнение получается вычитанием, которое обычно легко выполнить в уме. Двоичное дополнение также можно получить вычитанием, но его уже в уме выполнить трудно, да и весь смысл двоичного дополнения тогда пропадает, так как оно и использоваться будет для того, чтобы избавиться от вычитания. Тем большее значение имеет правило, позволяющее найти двоичное дополнение чисто механически.

Рассмотрим двоичное дополнение (до ближайшего круглого) нескольких пятизначных и шестизначных двоичных чисел:

число	дополнение
10101	$01011 = 01010 + 1$
10111	$01001 = 01000 + 1$
11101	$00011 = 00010 + 1$
100111	$011001 = 011000 + 1$
111010	$000110 = 000101 + 1$
111100	$000100 = 000011 + 1$

На этих примерах мы замечаем правило, которое оказывается справедливым во всех случаях: **для получения двоичного дополнения нужно в данном числе заменить все нули единицами, а единицы нулями, после чего прибавить к полученному числу единицу младшего разряда.** Нули в начале числа можно опускать.

Справедливость этого правила легко установить так: если к заданному числу прибавить «обращенное» (т. е. то, где нули заменены единицами, а единицы — нулями), то полученная сумма будет состоять из одних единиц. Теперь ясно, что, прибавляя к этой сумме единицу (младшего разряда), мы получим единицу со всеми нулями, т. е. единицу следующего разряда. Следовательно, двоичное дополнение исходного числа равно «обращенному» числу плюс единица младшего разряда, что и утверждалось.

Пользуясь двоичным дополнением, можно заменить вычитание сложением. Именно, вместо того чтобы вычесть данное число, достаточно прибавить его дополнение, а затем вычесть единицу того разряда, до которого дополнение производилось. Пусть, например, требуется произвести вычитание: 1111001011 — 1010110111. Двоичное дополнение вычитаемого, по приведенному выше правилу, равно $0101001000 + 1 = 0101001001$. Прибавляя его к уменьшаемому, находим

$$\begin{array}{r} 1111001011 \\ +\ 0101001001 \\ \hline 10100010100 \end{array}$$

Остается заметить, что дополнение производилось до одиннадцатого разряда, и поэтому самую левую единицу результата надо вычесть, т. е. просто отбросить. Искомая разность равна 100010100 (мы опустили еще один нуль впереди старшей единицы). Правильность полученного результата можно проверить его сложением с вычитаемым или же прямым вычитанием.

Замена вычитания сложением облегчает конструирование вычислительной машины. Двоичное дополнение может быть получено, благодаря приведенному выше правилу, чисто машинным путем, а вычитание лишней единицы слева обеспечивается тем, что на машине соответствующий разряд просто отсутствует, так что результат операции сразу получается правильным.

Перевод чисел из десятичной системы в двоичную и обратно производится по правилам, общим для всех позиционных систем счисления, поэтому на них можно не останавливаться. Возможен, впрочем, более простой и короткий способ перевода в двоичную систему, основанный на использовании смешанных систем счисления. О нем речь будет идти в следующем пункте.

Упражнения

26. Переведите в десятичную систему двоичное число 10110110,1101.

27. Переведите в двоичную систему десятичное число 467,65625.

28. Выполните указанные действия в двоичной системе счисления:

а)
$$\begin{array}{r} 1011101001{,}101 \\ +\ 10111011{,}011 \\ \hline 1110100{,}111 \end{array}$$

б) $1111010001 \times 10001011$;

в) $1110010111001 : 10011$.

Проверьте правильность выполнения всех операций, переведя все числа в десятичную систему и выполнив в ней все нужные действия.

29. Произведите вычитание $1000100011 - 1100111$ непосредственно и с помощью двоичного дополнения.

6*. Смешанные системы счисления. Если представить число в какой-либо системе счисления, а затем каждую цифру этого числа записать в другой системе счисления (с меньшим основанием), то мы получим запись числа в *смешанной* системе счисления. Смешанные системы использовались уже в Древнем Вавилоне: числа, меньшие шестидесяти, записывались там фактически в десятичной системе. Особенно широко такие системы применялись математиками Ближнего Востока и Средней Азии, когда десятичная система достаточно широко распространилась, но не вытеснила еще шестидесятеричную. По существу, запись $34°27'14''$ представляет пример использования смешанной системы счисления: градусы, минуты и секунды суть разряды шестидесятеричной системы, каждый из которых записан в десятичной системе счисления. Особенности этой системы, именно как смешанной, видны в записи операции, например сложения:

$$\begin{array}{r} 34°27'14'' \\ +\ 18°32'48'' \\ \hline 53°00'02'' \end{array}$$

Правила переноса из младшего разряда в старший оказываются различными в разных разрядах.

Практическое применение сейчас находят смешанные системы, в которых второй является двоичная: двоично-десятичная, двоично-восьмеричная и двоично-шестнадцатеричная. Широкое распространение таких систем связано со стремлением всемерно использовать преимущества двоичной системы и преодолеть ее недостатки.

Первые электронные вычислительные машины работали в привычной десятичной системе, но использовали электронные элементы с двумя устойчивыми состояниями. Из их комбинации конструировались элементы с десятью состояниями, пригодные для изображения цифр десятичной системы. Таким образом, возникла *двоично-десятичная система.*

Различные десятичные цифры требуют для своего двоичного представления различного количества двоичных разрядов — от одного для нуля и единицы до четырех для восьми и девяти. Чтобы не применять никаких разделительных знаков, для двоич-

ного изображения десятичной цифры в двоично-десятичной системе всегда выделяются четыре двоичных разряда. Группа из четырех двоичных разрядов, предназначенная для изображения одной десятичной цифры, называется *тетрадой*[1].

Число 3842 в двоично-десятичной системе будет иметь вид:

$$0011\ 1000\ 0100\ 0010.$$

Для удобства чтения тетрады записаны здесь с промежутками между ними. На самом деле все цифры могут быть поставлены рядом, а нули впереди или в конце после запятой могут быть опущены. Надо только помнить, что каждая группа состоит из четырех разрядов и они считаются влево и вправо от запятой. Например, двоично-десятичная запись 101001001100 00,01101 разбивается на тетрады так:

$$0010\ 1001\ 0011\ 0000,\ 0110\ 1000$$

и означает, следовательно, десятичное число 2930,68.

Из возможных шестнадцати различных тетрад 0000,0001, 0010,..., 1110,1111 в двоично-десятичной системе используются только первые десять; остальные тетрады не означают никакой десятичной цифры и поэтому не имеют смысла в двоично-десятичной системе. По этой причине арифметические операции в двоично-десятичной системе затруднительны.

Например, при сложении $45 + 34$ в двоично-десятичной системе можно действовать так же, как и в двоичной:

$$\begin{array}{r} 0100\,0101 \\ +\ 0011\,0100 \\ \hline 0111\,1001 \end{array}$$

Выполненное сложение дает верный результат 79. Если же нужно сложить $45 + 36$, то сложение в двоичной системе дает

$$\begin{array}{r} 01000101 \\ +\ 00110110 \\ \hline 01111011 \end{array}$$

где последняя тетрада не имеет смысла в двоично-десятичной системе. Сумма, равная 81, должна иметь двоично-десятичный вид 10000001. Как и в примере сложения углов, правила переноса здесь должны быть различными в разных разрядах.

Как видно, двоично-десятичная система плохо приспособлена к выполнению арифметических действий над числами. Однако она совершенно необходима при общении человека с электронно-вычислительной машиной, поскольку ввести десятичное число в машину можно только в двоично-десятичной форме. Перевод десятичных чисел в двоично-десятичные совершается чисто механически. Ввод чисел производится при помощи «первичных носителей информации», которыми являются перфокарты или

[1] Тетрада *(греч.)* — четверка.

перфоленты с пробитыми на них отверстиями. Пробивки также носят двоичный характер: наличие отверстия в нужном месте воспринимается как 1, а отсутствие — как 0. Машина для такой пробивки — перфоратор — устроена так, что при нажатии клавиши с десятичной цифрой автоматически пробивает в нужном месте соответствующую тетраду.

Несмотря на указанные недостатки, двоично-десятичная система все же используется и при выполнении арифметических операций — в так называемых «мини-компьютерах», настольных или карманных электронных вычислительных машинах (как, например, выпускаемые у нас в СССР ЭВМ «Электроника»). Здесь нет промежуточных носителей информации, и при вводе числа, при нажатии на клавишу с нужной цифрой в машину автоматически передается соответствующая тетрада.

Двоично-восьмеричная система аналогична описанной выше двоично-десятичной. Так как наибольшая цифра в восьмеричной системе — семь, то для изображения любой восьмеричной цифры достаточно трех разрядов. Группа из трех разрядов, отведенная для записи восьмеричной цифры, называется *триадой*. Например, восьмеричное число 6517,3 запишется в двоично-восьмеричной системе в виде 110101001111,011.

Все возможные триады в двоично-восьмеричной системе используются, что составляет важное преимущество этой системы перед двоично-десятичной. Другим, и самым важным, ее преимуществом является то, что двоично-восьмеричная запись числа совпадает с его двоичной записью.

Убедимся в справедливости этого утверждения на примерах. Пусть дано число $2814{,}6875_{10}$. Его двоичная запись такова: $101011111110{,}1011_2$. В восьмеричной системе это число имеет вид $5376{,}54_8$, и, заменяя восьмеричные цифры триадами, находим 101011111110,101100, что совпадает с двоичным представлением.

Причиной совпадения двоичной и двоично-восьмеричной записей является равенство $8 = 2^3$. Это совпадение, позволяя преодолеть недостатки двоичной системы счисления, служит причиной использования в работе с ЭВМ восьмеричной и двоично-восьмеричной систем.

Как уже говорилось в п. 5, запись двоичного числа длинна и однообразна, иметь дело с длинным набором одних только нулей и единиц затруднительно. Для сокращения записей двоичное число разбивают на триады, а затем каждую триаду заменяют соответствующей восьмеричной цифрой. Иначе говоря, считают, что данное двоичное число является двоично-восьмеричным, а человеку приходится уже иметь дело только с восьмеричным.

Заметим, что восьмеричную систему удобно использовать для ручного перевода чисел в двоичную систему. Для этого десятичные числа переводятся в восьмеричную систему, что проще и короче, а затем каждая восьмеричная цифра заменяется

соответствующей триадой. Более того, при вводе информации в машину перевод из восьмеричной системы в двоичную осуществляется механически при помощи перфоратора, как и для двоично-десятичной системы.

Количество разрядов, отводимых для записи двоичного числа в электронных вычислительных машинах первого и второго поколений [1], удобно делилось на триады; поэтому удобно было пользоваться двоично-восьмеричной и восьмеричной системами. В машинах третьего поколения типа ЕС ЭВМ («Ряд») основной единицей, из которой формируются многоразрядные двоичные числа, является группа из восьми разрядов — *байт*. Эту группу удобно делить не на триады, а на две тетрады. Поэтому здесь при общении человека с машиной предпочитают пользоваться *двоично-шестнадцатеричной системой* счисления.

Шестнадцатеричная система счисления есть обычная позиционная система с основанием шестнадцать. Поскольку все числа, меньшие основания, являются однозначными, то в шестнадцатеричной системе требуется иметь 16_{10} цифр. Принятых в десятичной системе десяти цифр не хватает, и их дополняют шестью первыми буквами латинского алфавита: A, B, C, D, E, F. Если каждую из цифр шестнадцатеричной системы заменить тетрадой двоичных, то мы получим двоично-шестнадцатеричную систему, в которой, следовательно, все возможные тетрады используются.

Соответствие между двоичными тетрадами и шестнадцатеричными цифрами следующее:

0000 — 0	0100 — 4	1000 — 8	1100 — C
0001 — 1	0101 — 5	1001 — 9	1101 — D
0010 — 2	0110 — 6	1010 — A	1110 — E
0011 — 3	0111 — 7	1011 — B	1111 — F

Арифметические действия в шестнадцатеричной системе счисления выполняются по правилам, общим для всех позиционных систем. Для этого прежде всего необходимо иметь «таблицу сложения» и «таблицу умножения», в которых будут приведены всевозможные попарные суммы и всевозможные попарные произведения однозначных чисел в шестнадцатеричной системе. После всего сказанного читатель легко справится с этой работой самостоятельно. Мы не будем приводить полностью этой таблицы ввиду ее большого объема, ограничившись только двумя столбцами той и другой.

---

[1] Самые первые электронные вычислительные машины, такие, как «Стрела», работали на базе электронных ламп. Их называют машинами первого поколения. Основными элементами машин второго поколения, например «Минск», были полупроводники. Сейчас в вычислительных центрах страны ЭВМ третьего поколения, входящие в единую систему (ЕС) «Ряд», работают на интегральных схемах.

$9+1=A$	$C+1=D$	$7\times1=7$	$D\times1=D$
$9+2=B$	$C+2=E$	$7\times2=E$	$D\times2=1A$
$9+3=C$	$C+3=F$	$7\times3=15$	$D\times3=27$
$9+4=D$	$C+4=10$	$7\times4=1C$	$D\times4=34$
$9+5=E$	$C+5=11$	$7\times5=23$	$D\times5=41$
$9+6=F$	$C+6=12$	$7\times6=2A$	$D\times6=4E$
$9+7=10$	$C+7=13$	$7\times7=31$	$D\times7=5B$
$9+8=11$	$C+8=14$	$7\times8=38$	$D\times8=68$
$9+9=12$	$C+9=15$	$7\times9=3F$	$D\times9=75$
$9+A=13$	$C+A=16$	$7\times A=46$	$D\times A=82$
$9+B=14$	$C+B=17$	$7\times B=4F$	$D\times B=8F$
$9+C=15$	$C+C=18$	$7\times C=54$	$D\times C=9C$
$9+D=16$	$C+D=19$	$7\times D=5B$	$D\times D=A9$
$9+E=17$	$C+E=1A$	$7\times E=62$	$D\times E=B6$
$9+F=18$	$C+F=1B$	$7\times F=69$	$D\times F=C3$

Пользуясь таблицами сложения и умножения, мы можем выполнять действия с многозначными числами в шестнадцатеричной системе, например:

$$\begin{array}{r} 3A7B9 \\ +\ E0158 \\ \hline 11A911 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1247A \\ \times\ \ 185 \\ \hline 5B762 \\ 923D0 \\ 1247A \\ \hline 1BC7662 \end{array}$$

Упражнения

30. Переведите десятичные числа 3750 и 3982 в двоичную систему, пользуясь предварительным переводом в восьмеричную.

31. Составьте полную таблицу сложения в шестнадцатеричной системе.

32. Составьте полную таблицу умножения в шестнадцатеричной системе.

33. Выполните следующие действия в шестнадцатеричной системе:

а) $379B+2DE5$; б) $A256-9E8$; в) $70A9\times138$; г) $A178:102$.

34. Переведите в двоичную систему десятичное число 92608,34375, пользуясь предварительным переводом в шестнадцатеричную.

7. Арифметические действия в электронной вычислительной машине. Современные электронные вычислительные машины используют элементы, имеющие два устойчивых состояния, и поэтому имеют дело только с двоичной системой счисления.

Как мы уже знаем из п. 5, арифметические операции в двоичной системе весьма просты. Умножение сводится к сдвигам множимого и сложения. Деление выполняется путем последователь-

ного вычитания, которое, в свою очередь, сводится к сложению с двоичным дополнением. Таким образом, **основной операцией в двоичной системе счисления является сложение двоичных чисел.**

Основным элементом арифметического устройства вычислительной машины является поэтому многоразрядный *двоичный сумматор,* осуществляющий сложение двух двоичных чисел. Так как сложение многозначных чисел сводится к сложению однозначных, то многоразрядный сумматор может быть составлен из одноразрядных сумматоров, каждый из которых предназначен для сложения цифр одного разряда.

Двоичный одноразрядный сумматор должен иметь три входа: на два из них поступают цифры соответствующих разрядов двух слагаемых, а на третий — возможный перенос из младшего разряда. Выходов из такого сумматора должно быть два: один из них — цифра суммы в данном разряде, второй — возможный перенос в старший разряд.

Одноразрядные двоичные сумматоры могут быть объединены в один многоразрядный. При операциях в двоичной системе все одноразрядные сумматоры соединяются одинаково, так что выход-перенос в старший разряд одного совпадает с входом-переносом из младшего для другого, находящегося в соседнем (слева) разряде относительно первоначального.

Все три входа в двоичном одноразрядном сумматоре равноправны, и значения выходов определяются не тем, что подается на тот или иной вход, а общим количеством единиц, поданных на входы. Устройство сумматора должно обеспечить его работу в точном соответствии с приведенной ниже таблицей. В ней через A и B обозначены входы, на которые подаются цифры слагаемых, S означает цифру суммы в данном разряде, а Z_1 и Z_2 — переносы соответственно из младшего разряда в данный и из данного разряда в старший.

Входы			Выходы	
A	B	Z_1	S	Z_2
0	0	0	0	0
0	0	1		
0	1	0	1	0
1	0	0		
1	1	0		
1	0	1	0	1
1	1	0		
1	1	1	1	1

Первая строка таблицы соответствует очевидному равенству $0+0+0=0$ и комментариев не требует. Следующие три строки таблицы объединяют случаи, когда лишь на одном входе есть единица. В этом случае сумма в данном разряде $S=1$, а перенос в старший разряд не образуется: $Z_2=0$. Если на два входа из трех подаются единицы, то сумма будет равна 10, т. е. цифра в данном разряде $S=0$, и образуется перенос. Этот случай соответствует трем следующим строкам таблицы. Наконец, последняя строка отвечает случаю $1+1+1=11$, так что $S=1$ и $Z_2=1$.

Электронные схемы, позволяющие физически осуществить работу в соответствии с приведенной таблицей, не слишком сложны. Тем не менее мы не станем их рассматривать, так как это уже не относится к нашему факультативному курсу.

СИММЕТРИЯ

СИММЕТРИЯ ПЛОСКИХ ФИГУР

1. Перемещения плоскости. Даже далекий от геометрии человек скажет, что квадрат — самый симметричный из четырехугольников. Однако объяснить, почему, например, квадрат симметричнее прямоугольника со сторонами разной длины, сможет не всякий. Геометр скажет, что произвольный прямоугольник можно совместить с самим собой[1] лишь четырьмя способами: тождественным отображением E, осевыми симметриями относительно прямых, проходящих через центр прямоугольника — точку пересечения диагоналей, перпендикулярно его сторонам, и, наконец, центральной симметрией относительно центра (рис. 1). А квадрат можно совместить с собой еще четырьмя способами — осевыми симметриями относительно диагоналей и поворотов на 90° и 270° (рис. 2).

Таким образом, считают, что фигура тем симметричнее, чем больше элементов в множестве ее самосовмещений, т. е. перемещений, при которых она отображается сама в себя.

На уроках геометрии уже были изучены такие перемещения: осевые симметрии, параллельные переносы и повороты. Напомним, что *осевую симметрию* относительно прямой l обозначают S_l, *параллельный перенос*, или, иначе, вектор, обозначают $\vec{a}$, а *поворот* на угол α вокруг точки O обозначают R_O^α. В школе рассматривают лишь повороты на углы от 0° до 180° по часовой стрелке и против часовой стрелки. Мы будем рассматривать повороты на любые углы. Для этого заметим, что если повернуть плоскость на 360°

[1] В учебниках геометрии в данном случае употребляется выражение «отобразить на себя». Однако часто бывает более удобно представлять перемещение плоскости как физическое перемещение, при котором точка не «отображается» на другую, а переходит в нее. При этом о точке, которая отображается в себя (образ которой совпадает с прообразом), говорят, что эта точка неподвижна при перемещении.

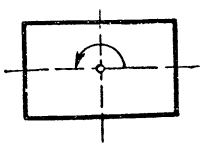


Рис. 1

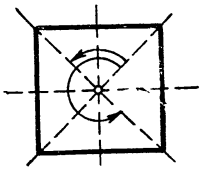


Рис. 2

вокруг какой-нибудь точки O, то все ее точки вернутся в исходное положение. Поэтому считают, что повороты на 360° по часовой стрелке и против часовой стрелки являются тождественным преобразованием, т. е. что $R_O^{\pm 360^\circ} = E$. Если же сначала совершить поворот на α, а потом на 360°, то получится поворот на $\alpha + 360^\circ$. При этом повороге каждая точка перейдет туда же, что и при повороте на α. Поэтому считают, что $R_O^{\alpha+360^\circ} = R_O^\alpha$.

Например, $R_O^{805^\circ} = R_O^{445^\circ} = R_O^{85^\circ}$, а $R_O^{-295^\circ} = R_O^{65^\circ}$. Так как любое число градусов можно записать в виде $360^\circ n + \alpha$, где n — целое число, и $-180^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ$, то любой поворот вокруг точки O можно представить в виде R_O^α, где $-180^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ$.

Напомним, что мы считаем направление против часовой стрелки положительным, а по часовой стрелке отрицательным. Например, $R_O^{-30^\circ}$ — поворот вокруг точки O на 30° по часовой стрелке.

Укажем еще один вид перемещений. Эти перемещения получаются следующим образом: берут какую-нибудь прямую a и параллельный ей вектор $\vec{a}$ и совершают сначала осевую симметрию S_a, а потом параллельный перенос $\vec{a}$ (рис. 3). В результате получается перемещение плоскости, которое называют *переносной* или *скользящей симметрией* и обозначают $S_a^{\vec{a}}$. Легко проверить, что то же самое преобразование получится, если сначала сделать параллельный перенос $\vec{a}$, а потом — симметрию S_a. Можно доказать, что описанными преобразованиями исчерпывается множество перемещений плоскости. Тождественное преобразование E является частным случаем как параллельных переносов (на вектор $\vec{0}$), так и поворотов (на нулевой угол).

Различать друг от друга виды перемещений плоскости можно по двум основным признакам: множеству неподвижных точек и сохранению или изменению направления обхода (ориентации). И при параллельных переносах и при поворотах направление обхода треугольников сохраняется: если обход какого-нибудь треугольника осуществляется по часовой стрелке, то после указанных преобразований получается треугольник, имеющий ту же ориентацию (рис. 4). Но при ненулевом параллельном переносе все точки изменяют свое положение, а при ненулевом повороте есть только одна неподвижная точка — центр поворота. Отметим, что при параллельных переносах каждый луч переходит в сонаправленный с ним луч, а при повороте на угол α — в луч, образующий с ним угол α (рис. 5).

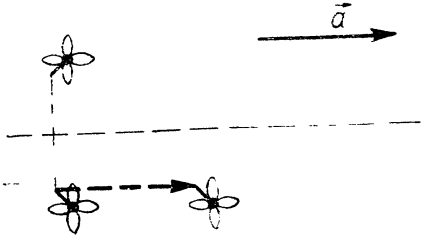


Рис. 3

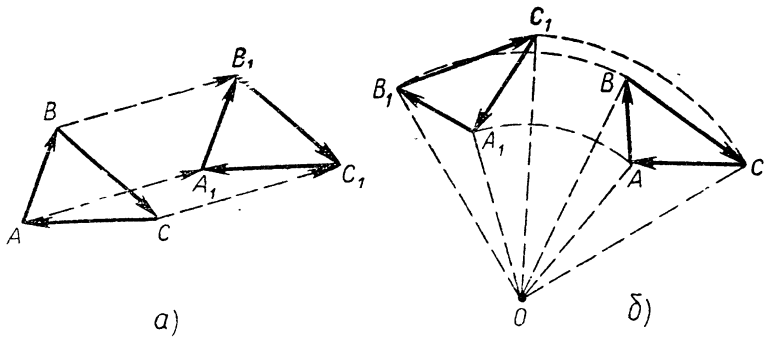


Рис 4

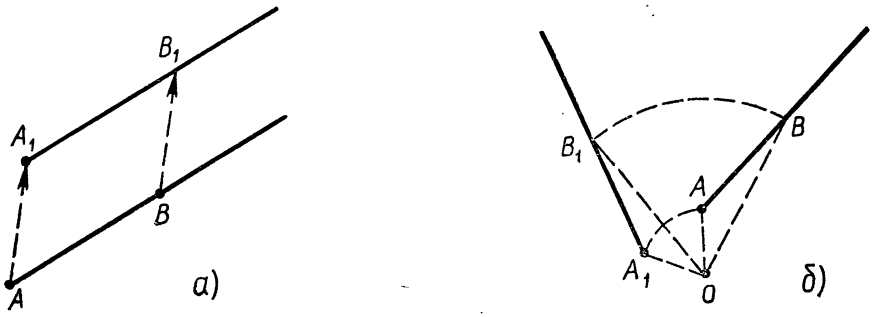


Рис. 5

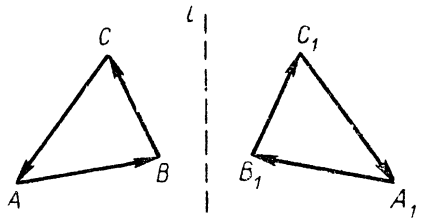


Рис. 6

При осевой и переносной симметриях направление обхода любого треугольника меняется на обратное. На рисунке 6 треугольник ABC ориентирован против часовой стрелки, а после осевой симметрии получается треугольник $A_1B_1C_1$, который ориентирован по часовой стрелке. Переносная симметрия не имеет неподвижных точек, а для осевой симметрии имеется целая прямая, состоящая из неподвижных точек, — ось симметрии.

Сказанное выше можно свести в следующую таблицу:

Вид преобразования	Множество неподвижных точек	Ориентация
Ненулевой параллельный перенос	Пусто	Сохраняется
Ненулевой поворот	Одна точка	Сохраняется
Осевая симметрия	Прямая линия	Меняется на обратную
Переносная симметрия	Пусто	Меняется на обратную
Тождественное преобразование	Вся плоскость	Сохраняется

Упражнения

1. Отметьте на плоскости три точки A, B и O. Возьмите какую-нибудь точку M и найдите ее образ T при параллельном переносе, переводящем A в B. После этого поверните точку T вокруг точки O на $-45°$.

2. Проведите прямую a и выберите вектор $\vec{a}$, параллельный этой прямой. Начертите любую фигуру и найдите ее образы:

а) при параллельном переносе на $\vec{a}$;

б) при осевой симметрии относительно a;

в) при переносной симметрии $S_a^{\vec{a}}$.

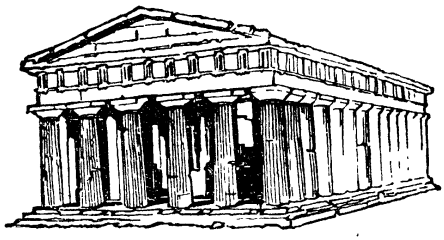


Рис. 7

3. Докажите, что двукратное применение переносной симметрии $S_a^{\vec{a}}$ равносильно параллельному переносу $2\vec{a}$.

4. Докажите, что если сделать сначала параллельный перенос, а потом поворот на α вокруг точки O, то получится поворот на α вокруг некоторой точки O_1.

5. Докажите, что если выполнить последовательно три осевые симметрии, то в результате получится либо осевая, либо переносная симметрия.

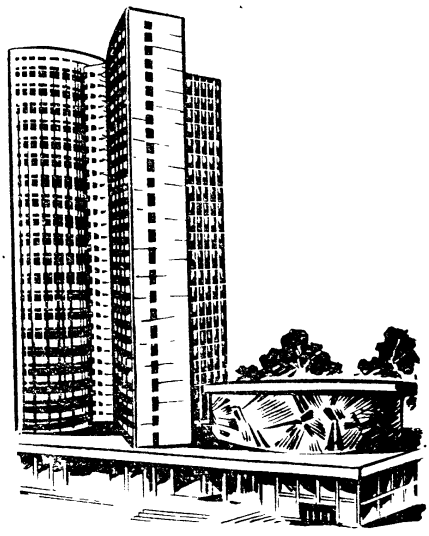


Рис. 8

2. Симметрии фигур. Греческое слово «симметрия» в переводе на русский язык означает «соразмерность». В древности

Рис. 9

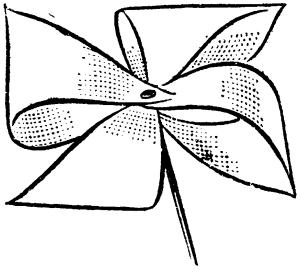


Рис. 10

Рис. 11

симметричными называли фигуры, имеющие ось или центр симметрии. Многие архитектурные сооружения поражают своей симметричностью, например пирамиды в Египте, Парфенон в Афинах (рис. 7), башни Московского Кремля, а из более современных — здание Совета Экономической Взаимопомощи в Москве (рис. 8). Правда, встречаются асимметричные, но тем не менее замечательные сооружения, например храм Василия Блаженного в Москве (рис. 9). Но, как правило, симметрия соблюдается и при возведении зданий, и при планировке парков, и во многих иных случаях. Например, вращающиеся части машин делают центрально-симметричными, причем ось вращения проходит через центр симметрии, — это обеспечивает уравновешенность возникающих при вращении сил.

Но кроме осевой и центральной симметрии встречаются иные виды симметрии. Например, если повернуть на 90° вертушку, изображенную на рисунке 10, она совместится сама с собой. Говорят, что у вертушки есть поворотная симметрия. А бордюр (рис. 11) переходит сам в себя при параллельных переносах (если, конечно, считать бордюр бесконечно продолженным в обе стороны).

Введем общее понятие симметрии: **назовем симметриями фигуры все перемещения, переводящие эту фигуру в себя** (говорят также о самосовмещениях фигур). Например, прямоугольник со сторонами разной длины имеет лишь четыре симметрии, а квадрат — восемь симметрий. Бывают фигуры, имеющие бесконечное множество симметрий: например, окружность переходит в себя при всех поворотах вокруг центра и всех симметриях относительно прямых, проходящих через центр, а вся плоскость — при любых перемещениях. Как уже говорилось, чем богаче множество симметрий фигуры, тем более она симметрична.

Симметрия играет важную роль и в самой математике, и в различных ее приложениях к физике (особенно, к кристаллографии и к квантовой механике), и в искусстве. Известный немецкий ученый Г. Вейль, написавший целую книгу о симметрии, выразился по этому поводу так: «Симметрия — в широком или узком смысле, в зависимости от того, как вы определяете значение этого понятия, — является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство».

Упражнения

6. Для каждой из следующих прописных букв русского алфавита найдите множество ее симметрий (рис. 12).

7. Для каждой из цифр (рис. 13) найдите множество ее симметрий. Напишите все двузначные числа, обладающие симметриями, отличными от тождественного преобразования. Обязательно ли для этого, чтобы такими симметриями обладали входящие в них цифры?

8. Найдите множество симметрий:

а) для пятиугольной звезды,

б) для розеток, изображенных на рисунке 14,

в) для решетки, образованной прямыми на координатной плоскости, имеющими уравнения $x = m$, $y = n$, где m и n целые числа.

9. Напишите заглавными буквами несколько слов, имеющих:

а) горизонтальную ось симметрии,

б) вертикальную ось симметрии,

в) две оси симметрии,

г) центр симметрии.

10. Докажите, что если фигура Φ имеет две перпендикулярные оси симметрии, то их точка пересечения является центром симметрии фигуры.

11. Найдите все симметрии: а) отрезка, б) луча, в) прямой линии, г) кругового кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями, д) фигуры, образованной двумя касающимися конгруэнтными окружностями, е) фигуры, образованной двумя квадратами, имеющими общую сторону.

Рис. 12

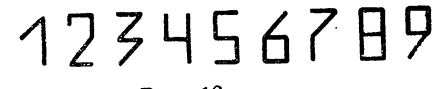


Рис. 13

12. Придумайте фигуру, имеющую ровно 3 симметрии (включая E).

Практическое задание. Покажите своим товарищам или родителям (а сначала самим себе) следующий фокус.

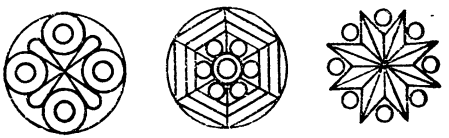


Рис. 14

Рис. 15

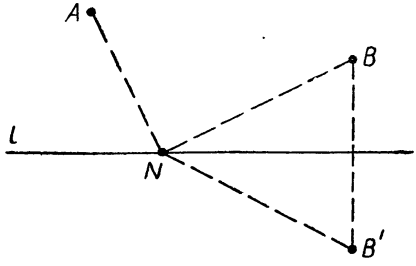


Рис. 16

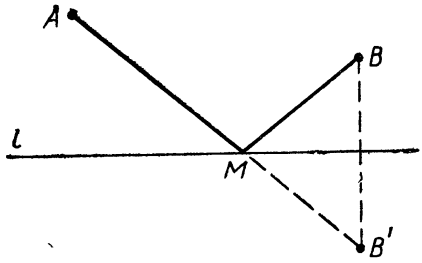


Рис. 17

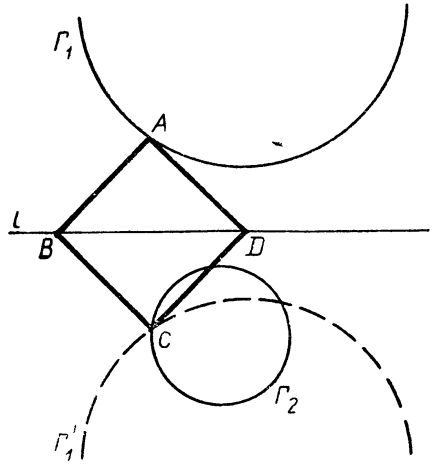


Рис. 18

Налейте полную пробирку чистой воды, заткните ее пробкой и расположите горизонтально вдоль слов, изображенных на рис. 15. Объясните, почему так получилось.

3. Симметрии и геометрические задачи. При решении самых различных задач на построение часто используются соображения симметричности. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Найти на прямой l такую точку M, чтобы сумма ее расстояний до двух заданных вне прямой точек A и B была наименьшей.

Если точки A и B лежат по разные стороны от прямой, то решение очевидно: надо провести отрезок AB и найти точку M пересечения этого отрезка с прямой l. Пусть теперь точки A и B находятся по одну сторону от прямой l. Заменим тогда точку B симметричной с ней относительно прямой l точкой B'. Где бы мы ни выбрали точку N на прямой l, выполняется равенство $|NB| = |NB'|$ (рис. 16). Поэтому $|AN| + |NB|$ принимает наименьшее значение одновременно с $|AN| + |NB'|$. Теперь ясно, как решить задачу. Надо найти точку B', симметричную точке B относительно l, соединить точку B' с точкой A и взять точку M пересечения (AB') и l (рис. 17).

Пример 2. Построить квадрат, две противоположные вершины которого лежат на данной прямой l, а две другие — на двух данных окружностях Γ_1 и Γ_2.

Предположим, что задача решена и при построении получился квадрат $ABCD$ (рис. 18).

Так как противоположные вершины квадрата симметричны относительно прямой, проходящей через две другие вершины, то точки A и C симметричны относительно прямой l. Но A лежит на окружности Γ_1, а потому симметричная с ней точка C должна лежать на окружности Γ', симметричной Γ_1 относительно прямой l. Кроме того, эта точка должна лежать и на окружности Γ_2, а потому она принадлежит пересечению окружностей Γ' и Γ_2.

Проведенный анализ подсказывает следующее построение. Строим окружность Γ', симметричную окружности Γ_1 относительно прямой l, и отмечаем точки C_1 и C_2 пересечения окружности Γ' с окружностью Γ_2. Далее находим на окружности Γ_1 точку A_1, симметричную C_1 относительно прямой l. Пусть $O = C_1A_1 \cap l$, на прямой l откладываем отрезки OB_1 и OD_1, конгруэнтные отрезку OC_1 (рис. 19). Легко проверить, что $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат, удовлетворяющий условию задачи. Второй квадрат получится, если выполнить аналогичное построение для точки C_2. Предоставляем читателю исследовать, в каких случаях получатся два решения, одно решение или не будет ни одного решения.

Пример 3. Даны угол AOB и точка M внутри него. Провести через точку M прямую, отрезок которой, заключенный между сторонами угла, делится в точке M пополам.

Предположим, что задача решена и CD — искомая прямая (рис. 20). Тогда точки C и D симметричны относительно точки M. Если точка T симметрична с точкой O относительно точки M, то $OCTD$ — параллелограмм и потому $TD \parallel OA$, $TC \parallel OB$. Значит, для решения задачи надо построить точку T, симметричную с точкой O относительно M, и провести через точку T прямые TC и TD, параллельные сторонам угла. Точки пересечения TC с OA и TD с OB и будут лежать на искомой прямой (рис. 20). Разумеется, достаточно построить одну из точек (C или D),

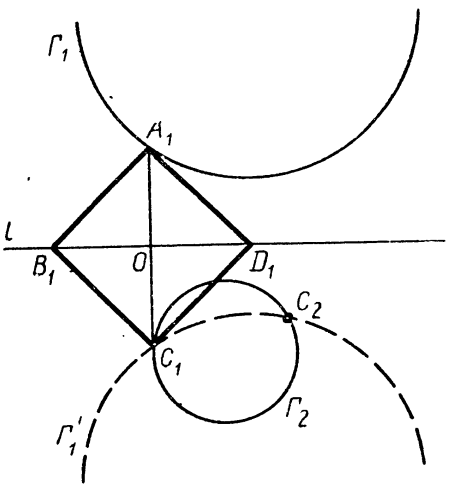


Рис. 19

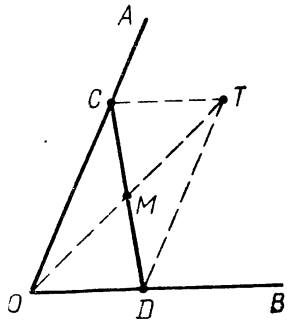


Рис. 20

так как одну точку прямой мы уже знаем — точку M.

Соображения симметрии применяются не только для решения задач на построение, но и для доказательства теорем.

Пример 4. На конгруэнтных сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC построены квадраты с центрами O_1 и O_2 (рис. 21). Доказать: а) точка пересечения прямых AO_2 и CO_1 принадлежит биссектрисе BM угла треугольника; б) прямая O_1O_2 перпендикулярна биссектрисе BM; в) $|AO_2| = |CO_1|$.

В самом деле, биссектриса угла B является осью симметрии равнобедренного треугольника ABC. Построение квадратов на сторонах AB и BC и указание центров этих квадратов не нарушает симметрии. Поэтому точки O_1 и O_2 симметричны относительно биссектрисы BM. Отсюда следует, что при симметрии относительно прямой BM точка O_1 переходит в O_2, а точка C — в A, и потому прямая O_1C переходит в прямую O_2A. Но тогда точка пересечения этих прямых должна остаться неподвижной, т. е. лежать на биссектрисе BM. Кроме того, отрезок O_1O_2, соединяющий симметричные точки, перпендикулярен оси симметрии BM. Наконец, отрезки O_1C и O_2A переходят друг в друга при указанной симметрии, и потому $|O_1C| = |O_2A|$.

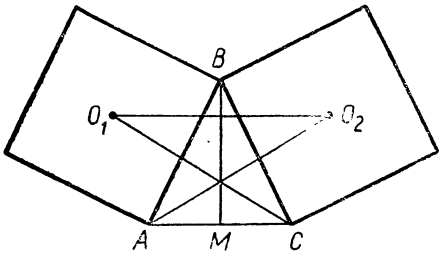


Рис. 21

Пример 5. Окружности Γ_1 и Γ_2 конгруэнтны и касаются друг друга в точке M. Три прямые, проходящие через точку M, пересекают окружность Γ_1 в точках A_1, B_1 и C_1, а окружность Γ_2 — в точках A_2, B_2 и C_2. Обозначим через O_1 и O_2 центры окружностей, вписанных в треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Доказать, что прямая O_1O_2 проходит через точку M (рис. 22).

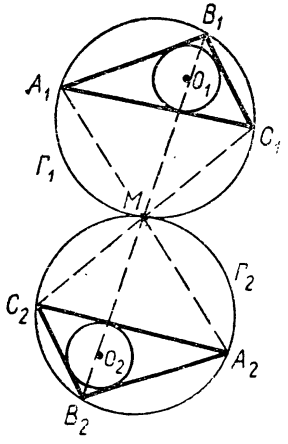


Рис. 22

В самом деле, окружности Γ_1 и Γ_2 симметричны относительно точки M, так как они конгруэнтны и касаются друг друга в этой точке. При указанной центральной симметрии точки A_1, B_1, C_1 переходят в точки A_2, B_2, C_2 соответственно. Значит, центр O_1 треугольника $A_1B_1C_1$ симметричен относительно M центру O_2 треугольника $A_2B_2C_2$, а потому отрезок O_1O_2 проходит через точку M.

Упражнения

13. На конгруэнтных сторонах равнобочной трапеции $ABCD$ вне ее построены равносторонние треугольники ADM и BCH. Докажите, что:

$$\text{а)}\ |MB| = |HA|, |MC| = |HD|;\ \text{б)} MH \parallel AB.$$

14. Через концы A и B большего основания равнобочной трапеции $ABCD$ проведены прямые AT и BT, образующие конгруэнтные углы TAB и TBA с основанием AB; точка T соединена с точкой E пересечения диагоналей трапеции. Докажите, что прямая ET:

а) проходит через точку, в которой пересекаются продолжения боковых сторон трапеции,

б) делит основания трапеции пополам,

в) перпендикулярна основаниям трапеции.

15. Пусть E — точка пересечения диагоналей равнобочной трапеции $ABCD$, AD и BC — ее боковые стороны. Докажите, что треугольники ADE и BCE конгруэнтны.

16. Точки M и H пересечения двух окружностей соединены с произвольной точкой T их линии центров. Докажите, что отрезки MT и HT конгруэнтны и образуют конгруэнтные углы с линией центров.

17. Центр O окружности принадлежит биссектрисе угла ABC, причем окружность пересекает стороны угла. Докажите, что

а) хорды MH и PT, отсекаемые окружностью на сторонах угла, конгруэнтны,

б) хорды MP и HT параллельны, а хорды MT и HP конгруэнтны (или, наоборот, хорды MT и HP параллельны, а хорды MP и HT конгруэнтны).

18. Из точки T, принадлежащей линии центров двух окружностей, проведены касательные TA и TB к первой окружности и TC, TD — ко второй окружности (здесь A, B, C, D — точки касания). Докажите, что прямые AC и BD так же, как и прямые AD и BC, пересекаются на линии центров.

19. На плоскости даны угол ABC и прямая l. Постройте квадрат так, чтобы две противоположные вершины квадрата принадлежали прямой l, а две другие — сторонам угла ABC.

20. Даны прямая l и две окружности по одну сторону от нее. Найдите на прямой такую точку T, что касательные TA и TB к заданным окружностям, проведенные из точки T, образуют с прямой l конгруэнтные углы.

21. Постройте четырехугольник $ABCD$, если известны длины его сторон, причем диагональ AC является биссектрисой угла A.

22. На прямоугольном биллиарде $ABCD$ даны два шара M и H. Как надо толкнуть шар H, чтобы он, отразившись последовательно от всех бортов биллиарда, попал в шар M?

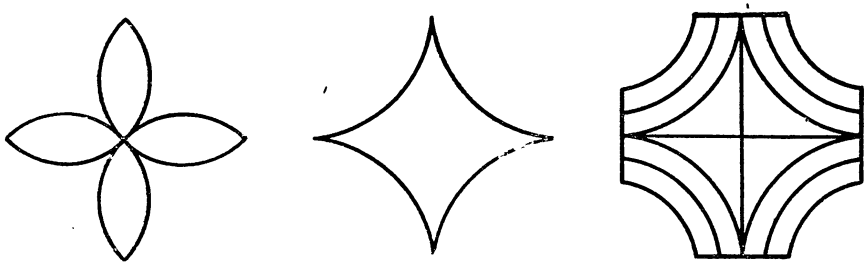


Рис. 23

23. Дан угол ABC и внутри него точка P. Постройте треугольник наименьшего периметра, одна вершина которого совпадает с точкой P, а две другие принадлежат сторонам данного угла.

24. В данный остроугольный треугольник впишите треугольник наименьшего периметра.

25. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, A_1, B_1, C_1, D_1 — такие точки на продолжениях его сторон, что B — середина отрезка AA_1, C — середина отрезка BB_1, D — середина отрезка CC_1 и A — середина отрезка DD_1. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

26. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ вписан в параллелограмм $ABCD$. Докажите, что центры этих параллелограммов совпадают.

27. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, P и T — центры окружностей, описанных вокруг треугольников ABC и CDA. Докажите, что $[PB] \cong [TD]$ и $[PD] \cong [TB]$.

28. Докажите, что никакой многоугольник с нечетным числом сторон не имеет центра симметрии.

29. Пусть прямая l, пересекающая конгруэнтные окружности, делит пополам отрезок O_1O_2, где O_1 и O_2 — центры окружностей. Докажите, что окружности высекают на этой прямой конгруэнтные хорды.

30. Через точку A пересечения окружностей проведите прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней конгруэнтные хорды.

4. Симметрии и классификация фигур. Фигуры, показанные на рисунке 23, различны между собой. Однако все они обладают одним и тем же множеством симметрий: у них те же виды симметрии, что и у квадрата (тождественное преобразование E, четыре осевые симметрии, центральная симметрия и два поворота). Если совместить центры и оси симметрии двух таких фигур, то любое преобразование, переводящее в себя одну из них, будет переводить в себя и вторую. Говорят, что такие две фигуры относятся к одному и тому же *классу симметрии*.

К одному и тому же классу симметрии относятся прямоугольник и ромб (рис. 24), пятиугольная звезда и правильный пятиугольник (рис. 25), окружность и круговое кольцо (рис. 26).

Разумеется, две конгруэнтные фигуры всегда принадлежат одному и тому же классу симметрии, т. е. класс симметрии — геометрическое свойство фигуры.

Известное из курса математики V класса разбиение множества *треугольников* на разносторонние, равнобедренные, но неравносторонние и равносторонние соответствует разбиению этого множества на классы симметрии.

Именно для разносторонних треугольников множество симметрий состоит лишь из одного элемента — тождественного преобразования E. У равнобедренных, но неравносторонних треугольников, кроме того, есть осевая симметрия относительно высоты[1], проведенной к основанию (рис. 27). А у равносторонних треугольников есть по шесть симметрий: тождественное преобразование E, три осевые симметрии относительно высот и два поворота R_O^{120} и R_O^{-120}, где O — центр треугольника, т. е. точка пересечения этих высот (рис. 28).

Легко убедиться в том, что указанные преобразования переводят каждый из рассматриваемых треугольников в себя. Несколько сложнее доказать, что иных перемещений, обладающих тем же свойством, не существует. Для этого нам понадобятся следующие очевидные утверждения (примем их без доказательства):

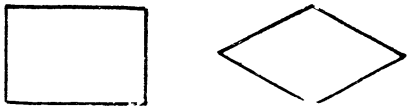


Рис. 24

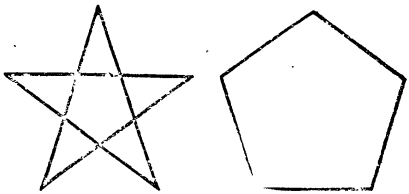


Рис. 25

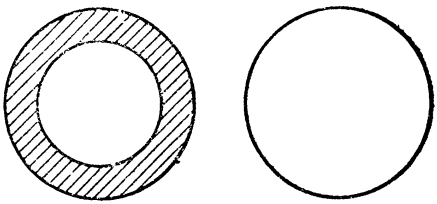


Рис. 26

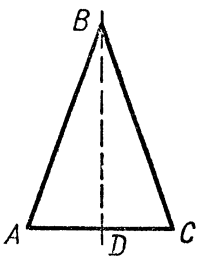


Рис. 27

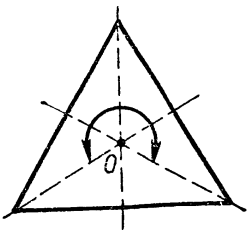


Рис. 28

[1] Для краткости речи мы будем говорить «осевая симметрия относительно высоты (или биссектрисы)» вместо «осевая симметрия относительно прямой, на которой лежит высота (или биссектриса)».

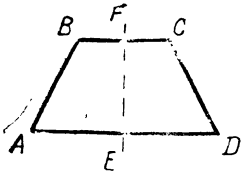


Рис. 32

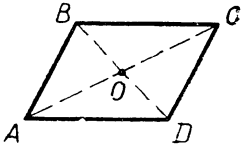


Рис. 33

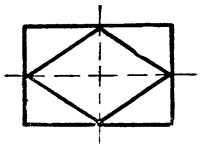


Рис. 34

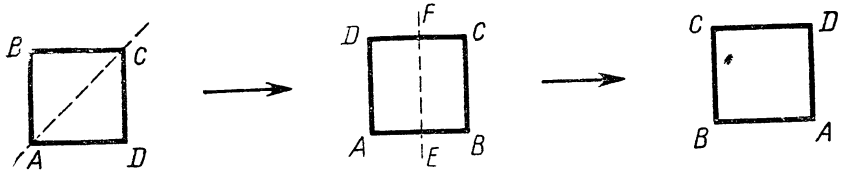


Рис. 35

прямоугольника состоит из четырех перемещений: тождественного, центральной симметрии и двух осевых симметрий.

Те же симметрии имеет ромб. Причина этого ясна из рисунка 34: каждое перемещение, переводящее в себя прямоугольник, переводит в себя и вписанный в него ромб, и, обратно, если перемещение переводит в себя ромб, оно переводит в себя и описанный вокруг ромба прямоугольник. Отметим, что, хотя у ромба те же симметрии, что и у прямоугольника, его оси симметрии расположены иначе, чем у прямоугольника: они не соединяют середины противоположных сторон, а соединяют противоположные вершины ромба.

Квадрат обладает и симметриями ромба, и симметриями прямоугольника. Это сразу дает 6 симметрий (тождественное преобразование, центральная симметрия, две осевые симметрии относительно диагоналей и две осевые симметрии относительно прямых, соединяющих середины противоположных сторон). Но если сначала выполнить симметрию относительно диагонали AC, а потом относительно прямой EF (рис. 35), то, как легко видеть, вершина A перейдет в вершину B, вершина B — в вершину C, вершина C — в вершину D и, наконец, вершина D — в вершину A. Получится поворот на 90° против часовой стрелки. Похожим образом получается еще одна симметрия — поворот на 90° по часовой стрелке.

Покажем, что иных симметрий, кроме указанных восьми, у квадрата нет. В самом деле, вершина A квадрата $ABCD$ может перейти в любую из четырех вершин. Если образ вершины A уже известен, то сторона AB может перейти в любую из двух сторон, исходящих из этого образа. Поэтому всего квадрат может иметь $4 \cdot 2 = 8$ симметрий.

Упражнения

31. Распределите по классам симметрии прописные буквы ла-

тинского алфавита, русского алфавита, римские цифры, арабские цифры.

32. Найдите классы симметрии для шестиугольников без самопересечений.

33. Придумайте фигуру, у которой было бы ровно пять симметрий, включая E.

34. Рассмотрев фигуры $A — E$ (рис. 36), скажите, к каким классам симметрии они относятся. Дополните теперь рисунки $A' — E'$ так, чтобы каждая фигура X' имела тот же класс симметрии, что и фигура X.

35. Дорисуйте каждую из фигур (рис. 37) так, чтобы получить орнамент того же класса симметрии, что и расположенный над ним.

36. Придумайте фигуру, отличную от равностороннего треугольника, но принадлежащую тому же классу симметрии.

37. На плоскости заданы два конгруэнтных равносторонних треугольника Φ и Φ_1. Сколько существует перемещений, отображающих Φ на Φ_1?

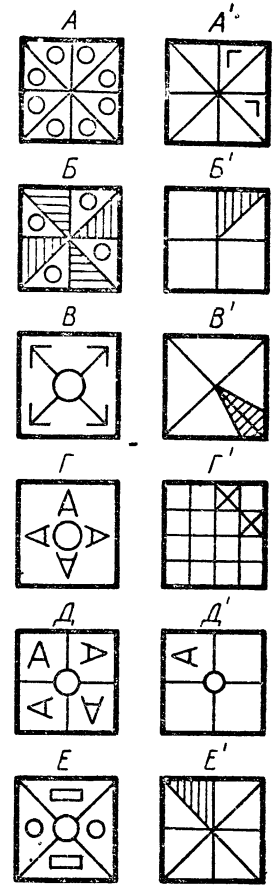


Рис. 36

5. Симметрии правильных многоугольников. Из всех треугольников самыми симметричными оказались равносторонние, а из четырехугольников—квадраты. Равносторонние треугольники можно получить следующим образом. Возьмем окружность и разделим ее на три конгруэнтные части. Соединяя точки деления, получим равносторонний треугольник (рис. 38). Точно так же квадрат можно получить, разделив окружность на четыре конгруэнтные части и соединив точки деления (рис. 39).

Естественно предположить, что таким же образом можно получить «самый симметричный» из n-угольников: надо разделить окружность на n конгруэнтных частей и по порядку соединить

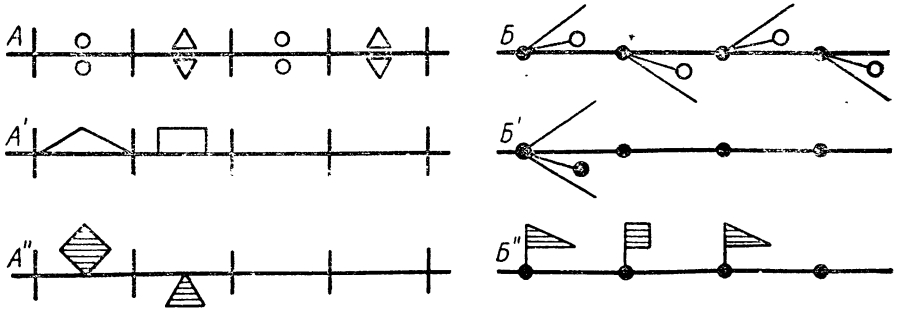


Рис. 37

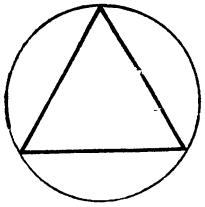


Рис. 38

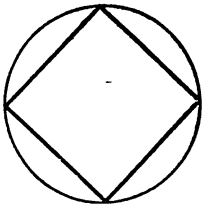


Рис. 39

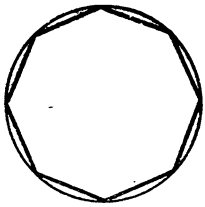


Рис. 40

точки деления $A_1, \ldots, A_n, A_1$. Назовем получившуюся замкнутую ломаную *правильным n-угольником*[1] (рис. 40). Ясно, что у правильного n-угольника n вершин (точек деления) и n сторон (соединяющих эти вершины хорд). Если провести из центра окружности лучи, проходящие через соседние точки деления, то угол между ними будет равен $\frac{360^\circ}{n}$. Такой же угол образуют лучи, проведенные из центра O перпендикулярно к соседним сторонам правильного n-угольника (рис. 41).

Найдем множество симметрий правильного n-угольника. При любой симметрии множество вершин переходит в себя. Поэтому остается неподвижной точка, равноудаленная от всех вершин, т. е. центр O многоугольника. Отсюда видно, что любая симметрия правильного n-угольника однозначно определяется указанием образов двух соседних вершин, например вершин A_0 и A_1. Если $f(A_0) = A_k$, то сторона A_0A_1 переходит или в сторону A_kA_{k+1}, или в сторону A_kA_{k-1} (при этом считаем, что $A_{-1} = A_{n-1}$ и $A_n = A_0$). Мы доказали, что множество симметрий правильного n-угольника содержит не более $2n$ преобразований.

Найдем эти преобразования. Чтобы перевести вершину A_0 в вершину A_k, а вершину A_1 — в вершину A_{k+1}, достаточно повернуть плоскость вокруг точки O на $\frac{360^\circ k}{n}$. Чтобы перевести A_0 в A_k и A_1 в A_{k-1} надо кроме того выполнить осевую симметрию относительно прямой OA_k (при этой симметрии точка A_k остается неподвижной, а точка A_{k+1} переходит в точку A_{k-1}). Вместо этого можно выполнить лишь симметрию относительно биссектрисы угла A_0OA_k, — она оставляет точку O неподвижной, точку A_0 переводит в точку A_k, а точку A_1 — в точку A_{k-1}. Легко доказать, что и поворот вокруг точки O на $\frac{360^\circ k}{n}$, и осевая симметрия относительно

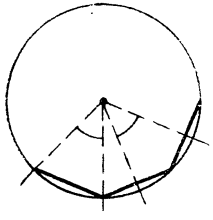


Рис. 41

[1] Это определение не совпадает с принятым в учебниках геометрии. Однако при изучении правильных многоугольников такой подход оказывается более целесообразным.

биссектрисы угла A_0OA_k переводят правильный n-угольник в себя, — эти преобразования переводят в себя окружность, две точки деления отображают в две точки деления и потому все остальные точки деления переводят в точки деления — ведь окружность делили на конгруэнтные части.

Итак, доказано, что множество симметрий правильного n-угольника состоит из $2n$ преобразований: n поворотов и n осевых симметрий. В дальнейшем мы будем обозначать это множество через D_n. Если $n=2$, то окружность надо разделить пополам и соединить точки деления отрезком, причем, чтобы построенный «двуугольник» был замкнутым, диаметр, соединяющий точки деления, надо пройти дважды в противоположных направлениях. Поэтому множество D_2 состоит из перемещений, совмещающих с собой такой «двойной» отрезок. Легко проверить, что в него входят четыре перемещения: тождественное преобразование E, осевые симметрии относительно прямой, на которой лежит двойной отрезок, и относительно срединного перпендикуляра к отрезку и, наконец, центральная симметрия относительно середины двойного отрезка. Если же $n = 1$, то у нас лишь одна точка деления A_0 и надо найти перемещения, при которых окружность переходит сама в себя, причем точка A_0 остается неподвижной. Ясно, что D_1 состоит из тождественного преобразования и симметрии относительно прямой OA_0.

Упражнения

38. Докажите, что в правильном n-угольнике все стороны конгруэнтны и все внутренние углы конгруэнтны.

39. Докажите, что если в выпуклом многоугольнике все стороны конгруэнтны и все углы конгруэнтны, то он правильный.

40. Вычислите внешние углы правильного n-угольника.

41. Окружность разделили на n конгруэнтных частей и в точках деления построили касательные. Докажите, что эти касательные ограничивают правильный n-угольник. Его называют описанным вокруг окружности.

42. Выразите площадь правильного n-угольника через радиус описанной окружности и длину стороны.

43. Выразите площадь правильного n-угольника через радиус вписанной окружности и длину стороны.

44. Постройте циркулем и линейкой правильный шестиугольник, правильный 12-угольник, правильный 8-угольник и правильный 16-угольник.

(Циркулем и линейкой можно построить правильные пятиугольник, 17-угольник и 257-угольник. Можно доказать, что ни правильный семиугольник, ни правильный девятиугольник циркулем и линейкой построить нельзя.)

45. На плоскости выбраны точки O и A и построены все точки, получаемые из A поворотом на углы $\frac{360°k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$

вокруг точки O. Докажите, что они являются вершинами правильного n-угольника.

46. Сосчитайте число диагоналей правильного n-угольника.

47. Докажите, что правильными шестиугольниками можно замостить плоскость.

48. Докажите, что плоскость можно замостить правильными восьмиугольниками и квадратами, длины сторон которых равны длинам сторон восьмиугольников.

49. Можно ли замостить плоскость правильными пятиугольниками? А правильными треугольниками?

6*. Звездчатые правильные многоугольники. Пятиконечную звезду можно получить следующим образом. Разделим окружность на пять конгруэнтных частей и соединим точки деления через одну (рис. 42). Таким же образом можно строить и другие *звездчатые* правильные многоугольники. Для этого надо задать два натуральных числа n и k, где $k < n$, разделить окружность на n конгруэнтных частей и соединить друг с другом точки деления, между которыми содержится k частей окружности (для пятиконечной звезды $n = 5$ и $k = 2$).

Если разделить окружность на 10 частей и взять $k = 4$, то мы снова получим пятиконечную звезду. Другая пятиконечная звезда получится, если выбрать в качестве начальной одну из оставшихся точек деления (рис. 43). В этом случае звездчатый многоугольник распадается на два. Если же взять $n = 10$ и $k = 3$, то получится один правильный звездчатый десятиугольник (рис. 44). Разница между этими случаями в том, что числа 10 и 4 имеют отличный от единицы общий делитель 2, а числа 10 и 3 взаимно просты. В общем случае справедливо следующее утверждение:

Если натуральные числа n и k взаимно просты, то соответствующий звездчатый n-угольник не распадается: выйдя из какой-нибудь его вершины и идя по сторонам, вернемся назад, лишь побывав во всех его вершинах. **Если же n и k имеют отличный от единицы наибольший общий делитель d, то n-угольник распадается на d правильных m-угольников, где $m = \frac{n}{d}$. При этом, если $d = k$, то эти многоугольники выпуклы, а если $d < k$, то они звездчатые.**

В самом деле, предположим, что, выйдя из какой-нибудь вер-

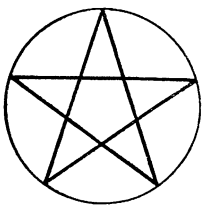


Рис. 42

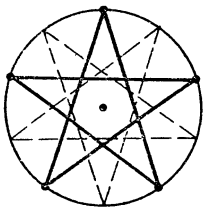


Рис. 43

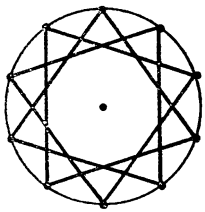


Рис. 44

шины, мы вернемся в нее через s шагов. Тогда число sk должно делиться на n, $sk = nt$ (ведь каждые n частей составляют полную окружность). В арифметике доказывают, что если n и k взаимно просты, то sk делится на n в том и только в том случае, когда s делится на n. Наименьшее положительное значение s с этим свойством равно n. Значит, если n и k взаимно просты, то возврат в исходную точку произойдет лишь через n шагов, т. е. после обхода всех вершин. Если же n и k имеют отличный от единицы наибольший общий делитель d, то $n = md$, $k = ld$ и равенство $sk = nt$ можно записать так: $sld = mdt$. Отсюда следует, что $sl = mt$, причем числа m и t взаимно просты. Наименьшее натуральное значение s, при котором это равенство может выполняться, равно m. Значит, вернемся в исходную точку через m шагов и получим m-угольник. Начав с других вершин, получим другие m-угольники. Их число равно d. Например, взяв $n = 8$, а $k = 2$, получим фигуру, состоящую из двух квадратов, повернутых друг относительно друга на 45° (рис. 45).

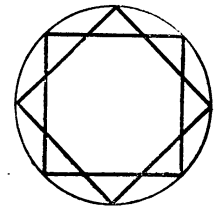


Рис. 45

Из построения правильных звездчатых n-угольников ясно, что после поворота окружности на $\frac{360°k}{n}$ они переходят сами в себя. Так же, как и для обычных правильных многоугольников, доказывается, что они переходят в себя и при симметриях относительно прямых, проходящих через центр окружности и через вершины A_k, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, или через середины дуг, получающихся при делении окружности на n конгруэнтных частей. Других симметрий эти многоугольники не имеют. Значит, множество симметрий правильного звездчатого n-угольника совпадает с множеством симметрий обычного правильного n-угольника, т. е. с D_n.

Звездчатые многоугольники часто используются в орнаментах, а пятиконечная звезда (пентаграмма) пользовалась большим почетом еще у древних вавилонян и у пифагорейцев — учеников древнегреческого философа и математика Пифагора, жившего в VI веке до н. э. В «Фаусте» Гете пентаграмма упоминается в сцене, где доктор Фауст встречается с Мефистофелем. У нас красная пятиконечная звезда — символ Советской Армии.

Первое математическое рассмотрение звездчатых многоугольников восходит к английскому математику Г. Бредвердайну (ок. 1290—1349), затем их изучал немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер (1571—1630).

Упражнения

50. Постройте правильные звездчатые многоугольники для следующих случаев:

а) $n = 8$, $k = 5$;
б) $n = 16$, $k = 3$;

в) $n = 16$, $k = 5$;
г) $n = 12$, $k = 5$.

51. Докажите, что пары чисел (n, k) и $(n, n - k)$ дают одинаковые звездчатые многоугольники.

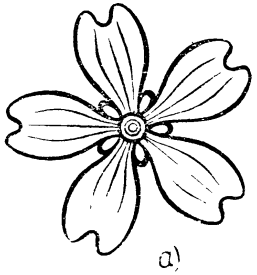
52. Пусть Φ — правильный n-угольник с центром O. Повернем его на угол $\frac{360°k}{nm}$ $(k = 0, 1, \ldots, m - 1)$ вокруг точки O и объединим все получившиеся многоугольники. Докажите, что множеством симметрии этого объединения является D_{nm}.

7. Розетки. Такое же множество симметрий, что и правильные многоугольники, имеют многие другие геометрические фигуры, цветы, актинии, медузы и т. д. (рис. 46, *а*). А у фигуры, изображенной на рисунке 46, *б*, множество симметрий беднее: в него входят лишь повороты, но не входят осевые симметрии.

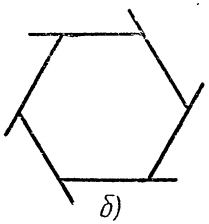
В технике такая симметрия встречается, если какая-нибудь деталь машины должна вращаться в строго определенном направлении, например у колеса турбины (рис. 47). В живой природе такая симметрия встречается очень редко. **В дальнейшем мы будем обозначать через Z_n множество, состоящее из поворотов вокруг фиксированной точки на углы $\frac{360°k}{n}$, где $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.** Фигура на рисунке 46, *б* принадлежит классу симметрии Z_6, а на рисунке 47 — классу симметрии Z_{16}.

Мы видели, что типичным представителем фигур, имеющих класс симметрии D_n, является правильный n-угольник. В качестве типичного представителя фигур, имеющих класс симметрии Z_k, выберем «вертушку». Она получается из правильного k-угольника, если продолжить все его стороны в направлении против часовой стрелки на отрезки одной и той же длины (рис. 46, *б*).

Для того чтобы получать фигуры, переходящие в себя при поворотах на углы $\frac{360°k}{n}$, поступают следующим образом. Рисуют какую-нибудь фигуру ψ, выбирают точку O и обозначают через ψ_k фигуру, получающуюся из ψ поворотом на $\frac{360°k}{n}$ вокруг точки O, где $k = 0, \ldots, n - 1$. Сама фигура ψ совпадает с ψ_0. Тогда фигура,



а)



б)

Рис. 46

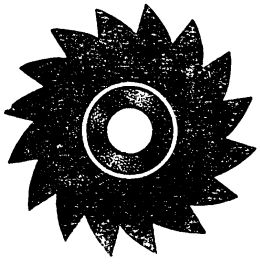


Рис. 47

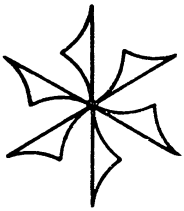


Рис. 48

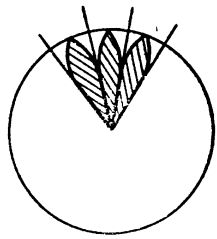


Рис. 49

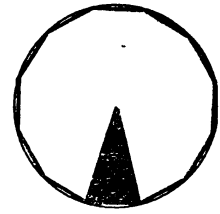


Рис. 50

$\Phi = \bigcup_{k=0}^{n-} \psi_k$ (т. е. объединение всех фигур ψ_k, $k = 0, \ldots, n-1$) будет переходить в себя при поворотах из Z_n (рис. 48). В самом деле, поворот на $\frac{360°k}{n}$ переводит фигуру $\psi = \psi_0$ в ψ_k, фигуру ψ_1 — в ψ_{k+1}, ..., ψ_{n-k} в ψ_0 и т. д., а значит, при этом повороте фигуры $\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}$ переставляются как бы по кругу, и потому их объединение не изменяется.

Описанный выше способ получения фигур, имеющих предписанную симметрию, не совсем удобен потому, что фигуры, получаемые из данной фигуры ψ при поворотах, могут налегать друг на друга (например, если выбранная фигура ψ уже имеет требуемую симметрию, то ни одной новой точки не получится). Поэтому обычно поступают иначе. Сначала делят плоскость на n конгруэнтных углов лучами, выходящими из точки O, а потом рисуют фигуру ψ в одной из этих частей. Тогда при поворотах будут получаться фигуры, не имеющие друг с другом общих точек, кроме, быть может, точек, лежащих на проведенных лучах (рис. 49).

Лучи, делящие плоскость, делят фигуру Φ на n частей, каждая из которых может быть получена из ψ с помощью поворота на $\frac{360°k}{n}$, где $k = 0, \ldots, n-1$. Для каждой точки A из Φ можно, таким образом, найти точку в ψ, из которой она получается с помощью такого поворота. При этом, если точка A не лежит на граничном луче, соответствующая точка в ψ однозначно определена.

Фигуру ψ называют фундаментальной областью для Φ относительно Z_n. Например, для круга фундаментальной областью относительно Z_n является сектор с центральным углом $\frac{360°}{n}$, а для правильного n-угольника — равнобедренный треугольник с вершиной O и углом при вершине $\frac{360°}{n}$ (рис. 50).

Чтобы получить фигуру Φ, симметричную не только при повороте, но и при осевых симметриях, надо разделить плоскость на n конгруэнтных углов лучами, выходящими из точки O, в одном из углов провести биссектрису и выбрать фундаментальную область ψ, симметричную относительно этой биссектрисы. Поворачивая ее и объединяя полученные фигуры, получим фигуру с искомой

симметрией. Взяв половину фигуры Ψ, отсеченную биссектрисой, получим фундаментальную область для Φ относительно множества преобразований D_n. В самом деле, при осевой симметрии относительно биссектрисы выбранная половина даст область ψ, а потом поворотами получим всю фигуру Φ.

Такую симметрию имеют красивые узоры, называемые *розетками*. Некоторые из них строятся следующим образом. Окружность делят на n конгруэнтных частей и проводят в двух соседних точках деления A_m и A_{m+1} касательные. После этого строят соединяющую точки A_m и A_{m+1} дугу окружности с центром в точке пересечения этих касательных. Поворачивая полученную дугу, получаем вогнутый n-угольник, сторонами которого служат дуги окружностей, причем соседние дуги касаются друг друга (рис. 51). Другие розетки получаются, если строить окружности с центрами в точках деления, проходящие через другие точки деления (рис. 52).

Розетки можно получать и путем перегибания листа бумаги с последующим прорезанием сложенного листа ножницами так, чтобы разрезы проходили через все слои (лучше брать папиросную бумагу). Полученный так узор показан на рисунке 53.

Все построенные нами розетки имели множеством симметрий или Z_n или D_n. Знаменитый художник, ученый и мыслитель эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1452—1519) исследовал вопрос: есть ли другие конечные множества симметрий плоских фигур? (Этот вопрос интересовал его в связи с некоторыми архитектурными проблемами.) Он убедился, что других таких множеств нет. Покажем теперь, какие из симметрий Z_n и D_n встречаются в природе и искусстве (кое-что об этом говорилось выше).

Наиболее распространенный тип симметрии — осевая симметрия с множеством $D_1 = \{ES\}$. Осевой симметрией обладают листья растений, фасады зданий, насекомые (жуки, бабочки) и т. д. (рис. 54).

В большинстве случаев, однако, здесь правильнее говорить не об осевой, а о зеркальной симметрии — о симметрии относительно плоскости. Если P — некоторая плоскость в пространстве, то симметрия относительно нее отображает каждую точку

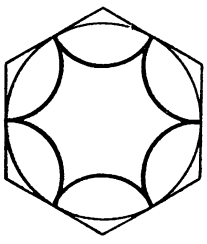


Рис. 51

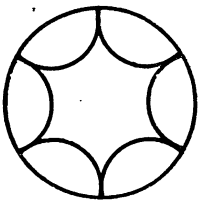


Рис. 52

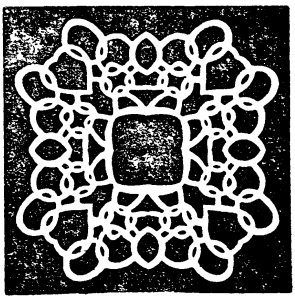


Рис. 53

пространства M в точку M' такую, что отрезок MM' перпендикулярен плоскости P и делится этой плоскостью пополам. Если смотреть на пространственную картинку из точки, лежащей в плоскости P, то плоскость мы увидим как прямую, причем точки M и M' будут симметричны относительно нее. Например, предмет и его изображение в зеркале симметричны относительно плоскости зеркала.

Во всех упомянутых случаях, вместо того чтобы говорить о зеркальной симметрии пространственного объекта (например, жука), можно говорить об осевой симметрии его изображения. В следующих наших примерах можно так и считать: скажем, поворотная симметрия изображения соответствует повороту относительно оси, переводящему пространственный объект в себя.

Среди цветков растений чаще других встречаются такие, которые имеют множество симметрий D_5, но есть и цветки с множествами симметрий D_1 (гладиолус), D_3 (ирис), D_4, D_6 и т. д. Довольно большая редкость — цветок с множеством симметрий Z_n. Разрезав яблоко поперек, вы увидите, что его сердцевина имеет множество симметрий D_5. Морские звезды и многие другие иглокожие животные имеют множество симметрий Z_5 или D_5, медузы — чаще всего D_4 или D_8. Один из самых замечательных примеров конечных множеств симметрий в неживой природе — снежинки. Как правило, они имеют множество симметрий D_6, редко D_3, но никогда D_5 или Z_5.

Рис. 54

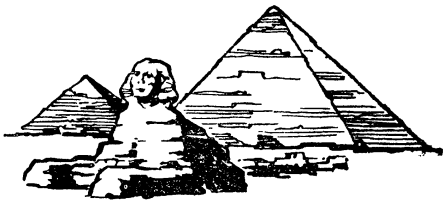


Рис. 55

Рис. 56

В архитектуре почти всегда наличествует множество D_n. Египетские пирамиды имеют множество симметрий D_4 (рис. 55), здание Театра Советской Армии в Москве — множество D_5, купола храма Василия Блаженного в Москве, если не учитывать их цвет, имеют множества симметрий Z_n и D_n с довольно большими n. Вазы часто украшают циклически расположенными рисунками с множеством симметрий Z_n или орнаментами с множеством D_n (рис. 56), крылья ветряных мельниц (рис. 57) имеют множество симметрий Z_3 или Z_4.

Мы не приводим примеров из физики — таких, как симметрии молекул и кристаллов,— так как они, как правило, не сводятся к плоскому случаю.

Конечно, свойства симметрии объектов природы связаны со свойствами симметрии атомов и молекул, однако эта связь очень мало исследована (точнее, очень трудно ее изучить).

Упражнения

53. Разделите окружность на n конгруэнтных частей и проведите окружности с центрами в точках деления, проходящие через соседние точки деления. Выполните это построение при $n = 4$, 6, 8, 12 и найдите в каждом случае фундаментальные области относительно Z_n и относительно D_n.

54. Разделите окружность на n конгруэнтных частей и проведите окружности с центрами в точках деления, проходящие через центр исходной окружности. Выполните это построение при $n = 4$, 6, 8, 12 и найдите в каждом случае фундаментальные области относительно Z_n.

55. Найдите фундаментальные области относительно Z_n и D_n для розеток, описанных на странице 54.

56. Разделите окружность на n конгруэнтных частей, постройте правильный вписанный и правильный описанный n-угольник. Найдите для полученной фигуры фундаментальные области относительно Z_n и D_n.

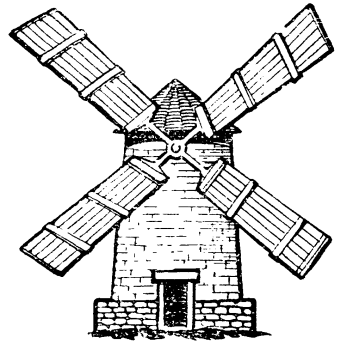


Рис. 57

57. Для построенных в задаче 50 правильных звездчатых n-угольников найдите фундаментальные области относительно Z_n и D_n.

58. Сложите лист папиросной бумаги 8 раз и вырежьте из него розетку. Какую симметрию имеет эта розетка?

8. Линейные орнаменты (бордюры). Верхнюю часть стен часто украшают узорами, которые называют *бордюрами* или линейными орнаментами (рис. 58). Чтобы сделать бордюр, делают трафарет, прикладывают его к стене, прокрашивают через него стену, после

чего сдвигают трафарет, снова прокрашивают стену и т. д. В результате получается узор в виде объединения частей, получаемых друг из друга параллельным переносом в одном и том же направлении и на одну и ту же длину. Узоры в комнате имеют конечные размеры. Но если представить себе бесконечную в обе стороны стену, то бордюр состоял бы из бесконечного множества частей и переходил бы сам в себя при соответствующих сдвигах как в одну сторону, так и в другую. Если обозначить длину основного сдвига через a, то бордюр переходил бы в себя при любом сдвиге в заданном направлении на величину na, где n — натуральное число, а также при аналогичных сдвигах в противоположном направлении.

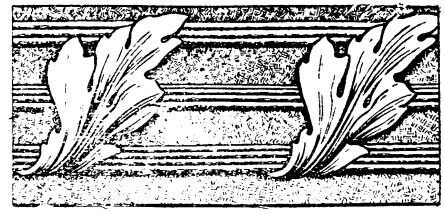


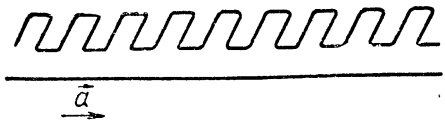
Рис. 58

В соответствии с этим введем следующее определение:

Линейным орнаментом или бордюром называют плоскую геометрическую фигуру, для которой существует такой параллельный перенос (вектор) $\vec{a}$, что она переходит в себя при всех параллельных переносах вида $n\vec{a}$, где n — целое число, и не переходит в себя при параллельных переносах иного вида. Вектор $\vec{a}$ называют направляющим для бордюра.

Если провести прямые, перпендикулярные вектору $\vec{a}$ и отстоящие друг от друга на расстояние a, то они разделят весь бордюр на бесконечное множество частей, причем любая из этих частей может быть получена из другой параллельным переносом вида $n\vec{a}$. Две части могут иметь общие точки лишь на разделяющих прямых. Возьмем одну из этих частей и обозначим ее ψ, а часть, полученную из нее параллельным переносом на $n\vec{a}$, обозначим ψ_n. Тогда каждую точку A бордюра можно получить из какой-нибудь точки части ψ параллельным переносом вида $n\vec{a}$. При этом, если точка A не лежит на какой-нибудь из разделяющих прямых, соответствующая точка в ψ определяется однозначно. Это значит, что ψ является фундаментальной областью для бордюра. Если фундаментальная область ψ имеет ту или иную симметрию, то и бордюр будет иметь более богатое множество симметрий, чем только переносы.

Можно доказать, что существует с е м ь классов симметрий для бордюров. Один из них показан на рисунке 59 — здесь нет иных симметрий, кроме параллельных переносов. Другой класс получается, если фундаментальная область ψ обладает центром симметрии (рис. 60). В этом случае бордюр имеет бесконечное множество центров симметрии, получаемых из центра симметрии области ψ параллельными переносами вида $n\vec{a}$. Далее, может случиться, что



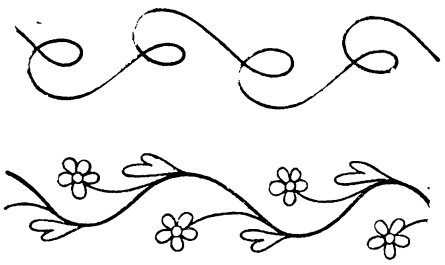


Рис. 59

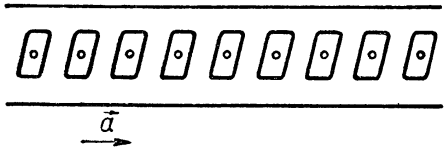


Рис. 60

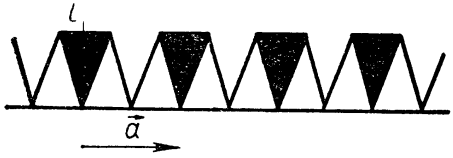


Рис. 61

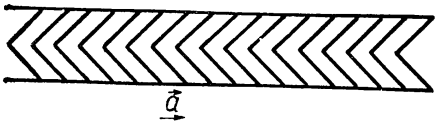


Рис. 62

область имеет ось симметрии l, перпендикулярную $\vec{a}$. В этом случае все прямые, полученные из l параллельными переносами $^1/_2 n\vec{a}$, будут осями симметрии бордюра (рис. 61). Точно так же, если область ψ имеет ось симметрии l, параллельную вектору $\vec{a}$, то и для всего бордюра прямая l будет осью симметрии (рис. 62). Если же область ψ имеет как ось симметрии l, параллельную вектору $\vec{a}$, так и ось симметрии, перпендикулярную этому вектору, то и полученный из нее бордюр имеет как ось симметрии l, так и бесконечное множество осей симметрии, перпендикулярных l. Кроме того, в этом случае ψ имеет центр симметрии (точку пересечения осей симметрии), а потому бордюр имеет бесконечное множество центров симметрии (рис. 63).

Может случиться, что бордюр обладает симметриями, отсутствующими у области ψ. Возьмем, например, фигуру, изображенную на рисунке 64. У нее лишь д в е симметрии — тождественное преобразование E и центральная симметрия. Однако если сдвигать ее в направлении $\vec{a}$, то получится бордюр, у которого бесконечное множество осей симметрии, перпендикулярных $\vec{a}$ (рис. 65). Это объясняется тем, что фигура ψ состоит из двух половин, каждая из которых имеет ось симметрии. И хотя вся фигура ψ не переходит в себя при симметриях относительно этих осей, полученный из нее бордюр имеет дополнительные симметрии.

Точно так же, если исходная фигура состоит из двух половин, причем одну из них можно перевести в другую с помощью переносной симметрии, то полученный из этой фигуры бордюр обладает переносной симметрией вида $S_{\vec{a}}^{\vec{a}}$, где $\vec{a}$ — вектор основного переноса.

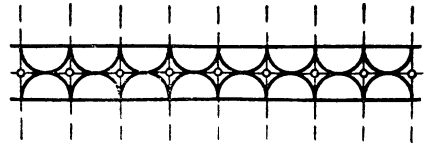


Рис. 63

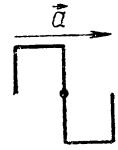


Рис. 64

Рис. 65

Упражнения

59. Для каждого из борлюров, изображенных на рисунке 66, укажите его класс симметрии.

60. Дополните рисунок 67 так, чтобы при сдвигах дополненной фигуры на вектор $\vec{a}$ получился бордюр, имеющий тот же класс симметрии, что и № 19 на рисунке 66.

9. Симметрия решеток. Выберем на плоскости декартову систему координат и отметим точки с целыми координатами. Тогда получится множество, изображенное на рисунке 68. Назовем его квадратной *решеткой*, хотя, быть может, было бы точнее дать это название фигуре, состоящей из всех горизонтальных и вертикальных прямых, проходящих через эти точки (рис. 69); впрочем, через те же самые точки можно провести и другие сетки прямых (рис. 70).

Другие *решетки* получаются следующим образом. Выберем на плоскости точки O, A и B, не лежащие на одной прямой, и обозначим через $\vec{a}$ вектор, переводящий O в A, а через $\vec{b}$ — вектор, переводящий O в B (рис. 71). Тогда параллельный перенос $m\vec{a} + n\vec{b}$, где m и n — целые числа, преобразует точку O в точку M (m, n). Совокупность всех таких точек образует решетку (рис. 72), порожденную точками O, A и B (или, что то же самое, точкой O и векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$). Легко доказать, что если взять, например, точку A и векторы, переводящие ее в O и B, то получится та же самая решетка. Ее можно получить и другими способами.

Существует п я т ь классов симметрии для решеток, в зависимости от того, какой симметрией обладает параллелограмм, тремя из вершин которого служат точки O, A и B. Если это параллелограмм общего вида, то кроме переносов на векторы $m\vec{a} + n\vec{b}$ (m и n — целые) в множество симметрий решетки входят еще симметрии относительно всех точек решетки, а также относительно центров параллелограммов (рис. 73). Более обширным окажется множество

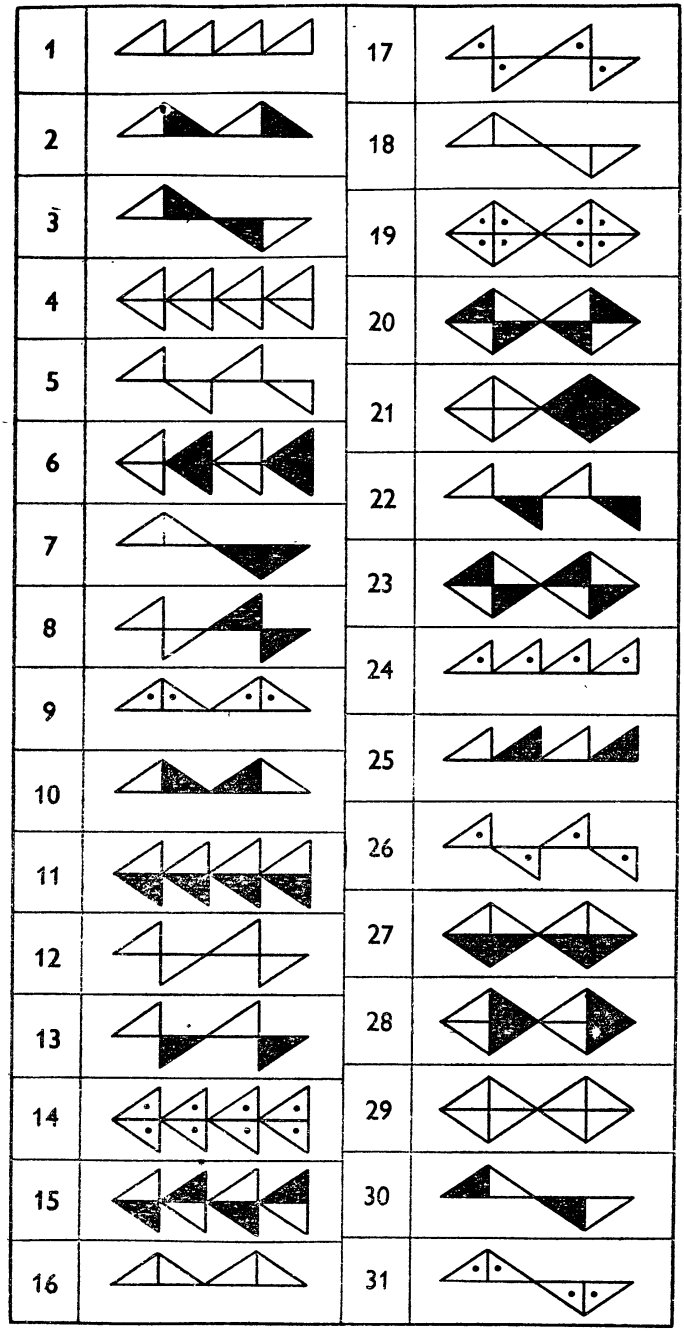

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31

Рис. 66

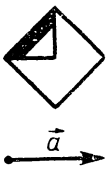


Рис. 67

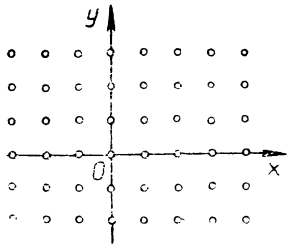


Рис. 68

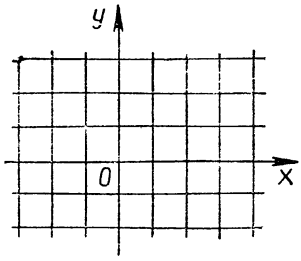


Рис. 69

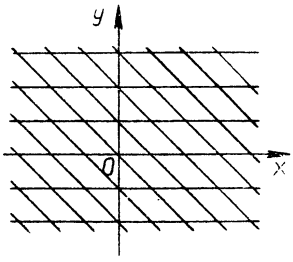


Рис. 70

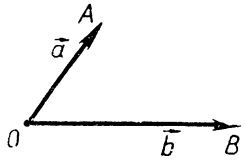


Рис. 71

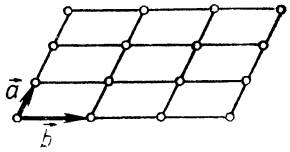


Рис. 72

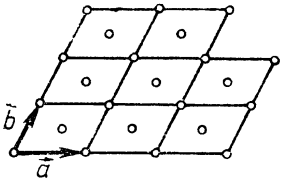


Рис. 73

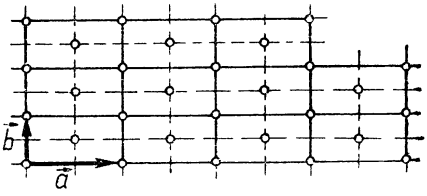


Рис. 74

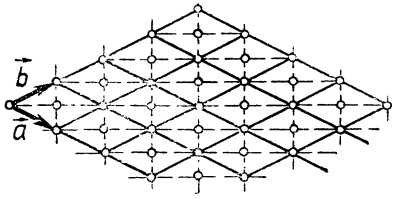


Рис. 75

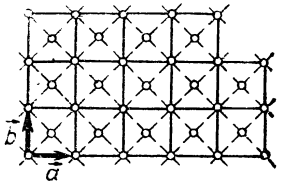


Рис. 76

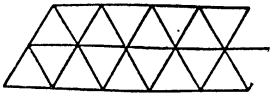
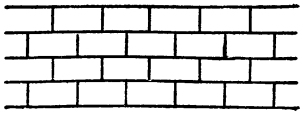
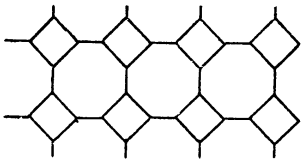


Рис. 77





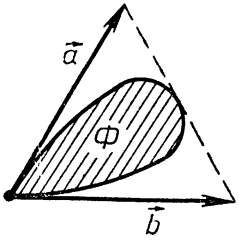


Рис. 78

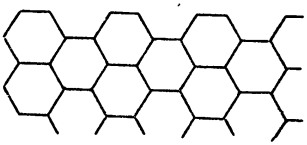


Рис. 79

симметрий решетки, если исходный параллелограмм будет прямоугольником или ромбом (рис. 74 и 75). В этих случаях, кроме параллельных переносов и центральных симметрий, решетка имеет еще горизонтальные и вертикальные оси симметрии. Для прямоугольной решетки эти оси проходят или через точки решетки, или через середины сторон прямоугольников, а для ромбической — лишь через точки решетки.

Еще более обширно множество симметрий в случае, когда исходный параллелограмм является квадратом или разбивается на два правильных треугольника (рис. 76). Для квадратной решетки добавляются осевые симметрии относительно прямых, содержащих диагонали квадратов, и повороты на углы в 90° и 270° вокруг точек решетки и центров квадратов. Предоставляем читателю найти, какие осевые симметрии и повороты добавляются, если основной параллелограмм можно разбить на два равносторонних треугольника (т. е. если он является ромбом, один из углов которого равен 60°) (рис. 77).

Упражнения

61. На рисунке 78 изображены фигура Φ и решетка. Постройте орнамент, соответствующий этим данным.

62. Перечислите все симметрии для орнаментов, изображенных на рисунке 79.

ГРУППЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1. Композиция геометрических преобразований. Ранее мы познакомились с множествами симметрий некоторых геометрических фигур — ромбов, прямоугольников, правильных многоугольников, звездчатых правильных многоугольников, розеток и т. д. Несмотря на разнообразие этих фигур, множеств симметрий оказалось не очень много: если множество симметрий фигуры Φ было конечным, то получались множества или типа D_n, или типа Z_n (т. е. или такие, как у правильного n-угольника, или такие, как у правильного n-угольника, у которого все стороны продолжены на одно и то же расстояние). У бордюра и решеток бывают бесконечные множества симметрии. Но и для них можно перечислить все типы этих множеств.

Возникает вопрос: есть ли фигуры с иными типами множеств симметрии, кроме тех, которые были описаны выше? Чтобы ответить на него, придется глубже изучить структуру множеств симметрии. Для этого напомним известное из курса геометрии понятие *композиции* геометрических преобразований.

Пусть φ и ψ — два геометрических преобразования (здесь и ниже речь будет идти лишь о преобразованиях плоскости). Если сначала сделать преобразование φ, а потом — преобразование ψ, то получится новое геометрическое преобразование θ, т. е., если φ переводит точку A в точку B, а ψ — точку B в точку C, то θ переводит A в C. Это преобразование называют композицией преобразований φ и ψ и обозначают $\psi \circ \varphi$. Таким образом,

$$(\psi \circ \varphi)(A) = \psi[\varphi(A)].$$

Рассмотренная ранее классификация перемещений позволяет сразу находить вид перемещения, получающегося при композиции двух или большего числа перемещений. Например, найдем композицию поворотов $R^{\alpha}_{O_1}$ и $R^{\beta}_{O_2}$. При повороте $R^{\alpha}_{O_1}$ каждый луч l переходит в луч m, образующий с l угол α, а при повороте $R^{\beta}_{O_2}$ луч m перейдет в луч, образующий с ним угол β. Значит, если сделать сначала поворот $R^{\alpha}_{O_1}$, а потом поворот $R^{\beta}_{O_2}$, то каждый луч перейдет в луч, образующий с ним угол $\alpha + \beta$. Если $\alpha + \beta$ не кратно 360°, то отсюда следует, что $R^{\beta}_{O_2} \circ R^{\alpha}_{O_1}$ — поворот на угол $\alpha + \beta$ вокруг какой-то точки O_3, т. е. $R^{\beta}_{O_2} \circ R^{\alpha}_{O_1} = R^{\alpha+\beta}_{O_3}$. Если же $\alpha + \beta$ кратно 360°, то $R^{\beta}_{O_2} \circ R^{\alpha}_{O_1}$ — параллельный перенос.

Центр O_3 результирующего поворота на угол $\alpha + \beta$ легко найти, отыскав образ каких-нибудь двух точек A и B: если точка A переходит в точку A_1, а точка B — в точку B_1, то O_3 равноудалена как от A и A_1, так и от B и B_1. Значит, достаточно восставить перпендикуляры к отрезкам AA_1 и BB_1 в их серединах и найти точку O_3 их пересечения.

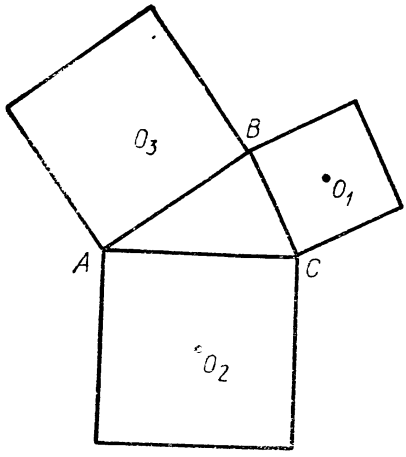


Рис. 80

Композиция преобразований часто используется при решении геометрических задач.

З а д а ч а 1. На сторонах треугольника ABC построены квадраты, лежащие вне этого треугольника, и отмечены их центры O_1, O_2, O_3 (рис. 80). Требуется восстановить треугольник, зная лишь положение этих центров.

Р е ш е н и е. Возьмем вершину A и сделаем последовательно повороты $R^{90}_{O_1}$, $R^{90}_{O_2}$, R^{90}_{O}. Так как $R^{90}_{O_1}(A) = B$, $R^{90}_{O_2}(B) = C$ и $R^{90}_{O_3}(C) = A$, то точка A вернется на свое место. Но преобразование $R^{90°}_{O_3} \circ R^{90°}_{O_2} \circ R^{90°}_{O_1}$ сохраняет ориентацию и имеет неподвижную точку A, а потому является поворотом на 270° вокруг этой точки. Значит, задача свелась к отысканию центра результирующего поворота.

Решенная задача является частным случаем задачи 2.

З а д а ч а 2. На сторонах треугольника ABC построены равнобедренные треугольники, лежащие вне ABC. Заданы вершины O_1, O_2, O_3 этих треугольников и величины α, β, γ углов при этих вершинах, причем $\alpha + \beta + \gamma \neq 360°$. Требуется восстановить треугольник ABC.

Для решения задачи заметим, что $R^{\gamma}_{O_3} \circ R^{\beta}_{O_2} \circ R^{\alpha}_{O_1}(A) = A$, потому вершина A — центр результирующего поворота.

Если $\alpha + \beta + \gamma = 360°$, то $R^{\gamma}_{O_3} \circ R^{\beta}_{O_2} \circ R^{\alpha}_{O_1}$ — тождественное преобразование и задача имеет бесконечно много решений.

Упражнения

63. Докажите, что композиция параллельного переноса и осевой симметрии является осевой или переносной симметрией. Укажите способ построения оси результирующей симметрии.

64. Докажите, что композиция поворота и осевой симметрии является осевой или переносной симметрией. Найдите ось этой симметрии.

65. Докажите, что композиция параллельного переноса и поворота является поворотом на тот же угол. Найдите центр этого поворота.

66. Докажите, что преобразование $S_l \circ R^{\alpha}_{O} \circ S_l$ является поворотом на угол $-\alpha$ вокруг точки, симметричной с точкой O относительно прямой l.

67. Докажите, что преобразование $S_l \circ \vec{a} \circ S_l$ является параллельным переносом.

68. На плоскости даны середины сторон некоторого n-угольника, где n нечетно. Постройте вершины этого n-угольника.

69. Постройте пятиугольник, зная вершины правильных пятиугольников, построенных на его сторонах и лежащих вне треугольника.

70. Решите предыдущую задачу, если на сторонах пятиугольника построены квадраты и указаны их центры.

71. Даны прямая l, точки A и B по одну сторону от нее и отрезок CD. Найдите на прямой l отрезок EH, конгруэнтный отрезку CD, так, чтобы длина ломаной $AEHB$ была наименьшей.

72. На плоскости даны n прямых: $l_1, \ldots, l_n$, где n четно. Постройте n-угольник $A_1 A_2 \ldots A_n$, для которого эти прямые являются

а) перпендикулярами к его сторонам, восстановленными в их серединах,

б) биссектрисами внешних или внутренних углов при вершинах.

73. Впишите в данную окружность n-угольник, стороны которого параллельны n заданным прямым на плоскости.

74. Представьте поворот R_O^α в виде композиции двух осевых симметрий. В какой точке пересекаются оси этих симметрий и чему равен угол между ними? Однозначно ли определены оси симметрии?

75. Представьте параллельный перенос $\vec{a}$ в виде композиции двух осевых симметрий. Как направлены оси этих симметрий и чему равно расстояние между ними? Однозначно ли определены эти оси?

76. Представьте переносную симметрию $S_{\vec{a}}$ в виде композиции трех осевых симметрий.

77. Найдите композицию параллельного переноса $\vec{a}$ и поворота R_O^α.

2. Алгебра преобразований. Композиция преобразований обладает рядом замечательных свойств, похожих на свойства умножения положительных чисел. Докажем, во-первых, что композиция преобразований *ассоциативна*, т. е. что для любых трех преобразований f, g, h выполняется равенство

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h). \qquad (1)$$

В самом деле, если преобразование h переводит точку A в точку B, преобразование g — точку B в точку C, а преобразование f — точку C в точку D, то как $(f \circ g) \circ h$, так и $f \circ (g \circ h)$ переводят A в D. В самом деле, так как $g(B) = C$ и $f(C) = D$, то

$$(f \circ g)(B) = f[g(B)] = f(C) = D.$$

Но тогда, так как $h(A) = B$, то

$$[(f \circ g) \circ h](A) = (f \circ g)(h(A)) = (f \circ g)(B) = D.$$

Так же проверяем, что $[f \circ (g \circ h)](A) = D$. Значит, любая точка

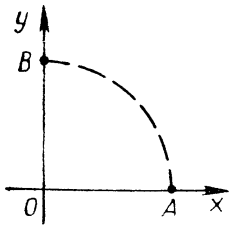


Рис. 81

плоскости переходит при этих двух преобразованиях в одну и ту же точку, а это и означает, что верно равенство (1).

Свойством *коммутативности* композиция преобразований не обладает — равенство $f \circ g = g \circ h$ выполняется не всегда.

Пример. Пусть $f = R_O^{90^\circ}$, а g — параллельный перенос плоскости на 1 единицу длины вправо. Тогда $f(O) = O$ и $g(O) = A$ (рис. 81), а потому $(g \circ f)(O) = g(f(O)) = A$. С другой стороны, $g(O) = A$ и $f(A) = B$, а потому $(f \circ g)(O) = f(g(O)) = f(A) = B$. Поскольку $A \neq B$, то $g \circ h$ и $f \circ g$ отображают O в разные точки, т. е. $g \circ f \neq f \circ g$.

Ту же роль, какую единица играет при умножении чисел, при композиции преобразований играет тождественное преобразование E: для любого преобразования f выполняются равенства

$$f \circ E = E \circ f = f.$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что для любой точки A имеем $E(A) = A$ и потому

$$(f \circ E)(A) = f(E(A)) = f(A).$$

Это значит, что $f \circ E = f$. Точно так же доказывается равенство $E \circ f = f$:

$$(E \circ f)(A) = E(f(A)) = f(A).$$

Напомним далее, что обратным к преобразованию f называют такое преобразование f^{-1}, что $f^{-1}(B) = A$, если $f(A) = B$. Ясно, что если сделать сначала преобразование f, а потом преобразование f^{-1}, то все точки плоскости в результате останутся на своих местах. Это значит, что $f^{-1} \circ f = E$. Так же доказывается, что $f \circ f^{-1} = E$.

Ясно, что преобразование f, в свою очередь, обратно преобразованию f^{-1}:

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Легко написать преобразование, обратное композиции $f \circ g$ преобразований g и f, т. е. $(f \circ g)^{-1}$. Для этого достаточно взять преобразования, обратные f и g, а затем их композицию, т. е. преобразование $g^{-1} \circ f^{-1}$. В самом деле, в силу свойства ассоциативности имеем:

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1}.$$

Но $g \circ g^{-1} = E$, и потому

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ E \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = E.$$

Это и значит, что $g^{-1} \circ f^{-1}$ обратно $f \circ g$.

Отметим, что для получения преобразования, обратного $f \circ g$, пришлось не только заменить f и g обратными им преобразованиями, но и переставить эти преобразования местами. Ведь утром мы сначала надеваем рубашку, а потом пиджак, а вечером сначала снимаем пиджак, а потом рубашку.

Упражнения

78. Какое преобразование обратно:

а) параллельному переносу $\vec{a}$;

б) повороту R_O^α;

в) осевой симметрии S_l;

г) переносной симметрии $S_{\vec{a}}$?

79. Найдите композицию преобразований $S_l \circ R_O^\alpha \circ S_l$.

80. Найдите композицию преобразований $f \circ g \circ f^{-1}$ и $f \circ h \circ f^{-1}$.

81. Найдите преобразование, обратное преобразованию

$$f \circ g \circ f^{-1}$$

3. Группы преобразований. Часто бывает, что при композиции двух преобразований того или иного вида снова получается преобразование того же вида. Например, пусть f и g — перемещения плоскости. Так как эти преобразования не меняют расстояний между точками плоскости, то и их композиция $f \circ g$ не изменяет расстояний, т. е. также является перемещением плоскости.

Вообще, если некоторое множество G состоит из преобразований, при которых некоторый объект остается неизменным, то вместе с любыми двумя преобразованиями G содержит и их композицию. Например, любой поворот вокруг точки O оставляет неподвижной точку O и сохраняет направления обхода (ориентации). Поэтому можно предвидеть, что композицией двух поворотов вокруг точки O снова окажется поворот вокруг той же точки. Действительно,

$$R_O^\alpha \circ R_O^\beta = R_O^{\alpha+\beta}.$$

Композицией двух параллельных переносов является снова параллельный перенос (параллельные переносы переводят в себя любой пучок параллельных прямых).

Во всех разобранных примерах выполняется еще одно условие — **если какое-то преобразование принадлежит данному множеству** (множеству перемещений, поворотов вокруг точки O или параллельных переносов), **то тому же множеству принадлежит и обратное ему преобразование** (преобразование, обратное перемещению, является перемещением; преобразование обратное повороту вокрут точки O, — поворотом вокруг той же точки; преобразование, обратное параллельному переносу,— параллельным переносом).

Не следует думать, что такое свойство замкнутости относительно композиции и перехода к обратному преобразованию присуще любому множеству преобразований. Например, множество осевых симметрий этим свойством не обладает: при композиции двух осевых симметрий получаются повороты или параллельные переносы, а не осевые симметрии. Точно так же при композиции двух пере-

носных симметрий получаются преобразования, не являющиеся переносными симметриями.

Совокупности преобразований, замкнутые относительно композиций и перехода к обратному элементу, играют очень большую роль в математике. Поэтому им дали особое имя и назвали *группами преобразований*.

Итак, будем говорить, **что непустое множество геометрических преобразований образует группу, если**

а) вместе с любыми двумя преобразованиями φ и ψ оно содержит их композиции $\varphi \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi$,

б) вместе с каждым преобразованием φ оно содержит обратное ему преобразование φ^{-1}.

Из требований а) и б) вытекает, что любая группа преобразований содержит тождественное преобразование E: она содержит хоть одно преобразование φ, поэтому и $\varphi^{-1} \in G$, а тогда и преобразование $\varphi^{-1} \circ \varphi$, т. е. E принадлежит G.

Упражнения

82. Образуют ли группу преобразований осевые симметрии?

83. Образуют ли группу преобразований центральные симметрии?

84. Образуют ли группу преобразований гомотетии относительно фиксированной точки O?

85. Проведем прямую линию и укажем на ней направление. Образуют ли группу параллельные переносы, имеющие заданное направление? А параллельные переносы, параллельные заданной прямой?

86. Образует ли группу совокупность тождественного преобразования и осевой симметрии S_l?

4. Группа симметрий геометрической фигуры. Пусть Φ — геометрическая фигура и G_Φ — множество ее симметрий. Если f и g принадлежат G_Φ, то они переводят фигуру Φ в себя. Но тогда и преобразование $f \circ g$ переводит Φ в себя. Например, ромб $ABCD$ переходит в себя при осевых симметриях относительно прямых AC и BD. Поэтому он переходит в себя и при композиции этих симметрий, т. е. при центральной симметрии относительно точки O пересечения диагоналей.

Вместе с каждым преобразованием f множеству G_Φ принадлежит и преобразование f^{-1}, обратное f. Ведь если f отображает фигуру Φ на себя, то тем же свойством обладает и f^{-1}, — при этом преобразовании все точки фигуры Φ возвращаются в исходное положение, т. е. тоже в точки той же фигуры.

Мы доказали, что множество G_Φ симметрий фигуры Φ вместе с любыми двумя преобразованиями f и g содержит их композицию $f \circ g$, а вместе с каждым преобразованием f — обратное ему преобразование f^{-1}. Иными словами, G_Φ является группой преобразований. Поэтому в дальнейшем мы будем говорить не «множество симметрий фигуры Φ», а «группа симметрий фигуры Φ».

Если фигура Φ — многоугольник, то любое преобразование из G_Φ переводит вершины Φ в вершины того же многоугольника. Поэтому симметрии многоугольника можно записывать в виде двухстрочных таблиц, в первой строке которых перечислены вершины многоугольника, а во второй — вершины, в которые они переходят при данном преобразовании. Например, группа симметрий прямоугольника $ABCD$ состоит из следующих преобразований:

$$\begin{pmatrix} ABCD \\ ABCD \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ABCD \\ BADC \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} ABCD \\ CDAB \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ABCD \\ DCBA \end{pmatrix}.$$

Композицию преобразований, записанных в виде таких таблиц, легко выполнять, следя за тем, куда переходит каждая точка.

Например, если $f = \begin{pmatrix} ABCD \\ BADC \end{pmatrix}$ и $g = \begin{pmatrix} ABCD \\ DCBA \end{pmatrix}$, то при преобразовании $g \circ f$ точка A сначала переходит в B, а потом B переходит в C, т. е. $g \circ f$ переводит A в C. Так же находим, что B переходит в D, C — в A и D — в B. Значит,

$$g \circ f = \begin{pmatrix} ABCD \\ CDAB \end{pmatrix}.$$

Упражнения

87. Запишите в виде таблиц группу симметрий правильного шестиугольника $ABCDEH$.

88. Пусть $f \in G_\Phi$, где Φ — пятиугольник $ABCDE$ и f задается таблицей

$$\begin{pmatrix} ABCDE \\ BCDEA \end{pmatrix}.$$

Докажите, что таблицы $\begin{pmatrix} ABCDE \\ EABCD \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} ABCDE \\ DEABC \end{pmatrix}$ тоже задают преобразования, принадлежащие G_Φ.

89. Найдите композицию преобразований $f \circ g$ и $g \circ f$, если

$$f = \begin{pmatrix} ABCDEF \\ DEFABC \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} ABCDEF \\ CDEFAB \end{pmatrix}.$$

90. Докажите, что если фигура Φ имеет центр симметрии O и ось симметрии l, проходящую через точку O, то она симметрична и относительно прямой m, проходящей через точку O и перпендикулярной оси l.

91. Докажите, что если фигура Φ имеет ось симметрии и переходит в себя при повороте на 60°, то у нее есть, по крайней мере, три оси симметрии.

92. Докажите, что если фигура Φ переходит в себя при параллельном переносе $\vec{a}$, то она переходит в себя и при всех параллельных переносах $n\vec{a}$, где n — целое число.

93. Докажите, что если фигура Φ переходит в себя при параллельном переносе $\vec{a}$ и имеет центр симметрии O, то у нее есть бесконечно много центров симметрии, переходящих друг в друга при параллельном переносе $\vec{a}$.

94. Докажите, что если фигура Φ имеет две оси симметрии l и m, наклоненные друг к другу под углом α, то она переходит в себя при повороте на угол 2α вокруг точки пересечения этих осей.

95. Докажите, что если фигура Φ имеет две параллельные оси симметрии, то она переходит в себя при параллельном переносе $\vec{a}$, направление которого перпендикулярно осям симметрии, а величина вдвое больше расстояния между этими осями.

96. Докажите, что если фигура Φ имеет ось симметрии l и переходит в себя при повороте на угол α вокруг точки O, не принадлежащей l, то она переходит в себя и при повороте на угол $-\alpha$ вокруг точки O_1, симметричной с O относительно оси l.

5. Конечные группы геометрических преобразований. Ранее были описаны два типа групп геометрических преобразований, состоящие из конечного множества элементов, — группы вида D_n и группы вида Z_n. Мы докажем сейчас, что этими двумя типами исчерпываются все конечные группы преобразований плоскости. Прежде чем доказывать это утверждение, выясним, каких преобразований н е может быть в конечных группах. Ясно, что если группа геометрических преобразований содержит ненулевой параллельный перенос $\vec{a}$, то она бесконечна (так как содержит все параллельные переносы: $n\vec{a}$, $n \in Z$). Поэтому, чтобы доказать, что какие-нибудь преобразования не могут принадлежать конечным группам, достаточно вывести из наличия этих преобразований существование ненулевого параллельного переноса.

Л е м м а 1. **Конечная группа преобразований не может содержать переносной симметрии $S_a^{\vec{a}}$.**

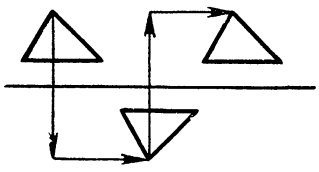


Рис. 82

В самом деле, из рисунка 82 видно, что двукратное применение переносной симметрии $S_a^{\vec{a}}$ равносильно параллельному переносу $2\vec{a}$. Значит, если $S_a^{\vec{a}} \in G$, то и $2\vec{a} \in G$, а тогда группа G бесконечна.

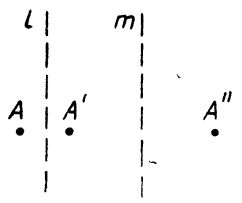


Рис. 83

Л е м м а 2. **Конечная группа преобразований не может содержать осевых симметрий относительно параллельных, но различных осей l и n.**

В самом деле, при преобразовании $S_m \circ S_l$ все точки плоскости перемещаются в направлении, перпендикулярном l и m, на расстояние, равное удвоенному расстоянию между этими пря-

мыми (рис. 83). Иными словами, $S_m \circ S_l$ является ненулевым параллельным переносом $S_m \circ S_l = \vec{a}$. Если $S_l \in G$ и $S_m \in G$, то $\vec{a} \in G$, и потому группа G бесконечна.

Лемма 3. **Конечная группа преобразований не может содержать поворотов $R^{\alpha}_{O_1}$ и $R^{\beta}_{O_2}$ вокруг различных центров O_1 и O_2** (здесь, разумеется, предполагается, что $R^{\alpha}_{O_1} \neq E$, $R^{\beta}_{O_2} \neq E$).

В самом деле, если бы $R^{\alpha}_{O_1}$ и $R^{\beta}_{O_2}$ принадлежали группе, то этой группе принадлежало бы и геометрическое преобразование $R^{-\alpha}_{O_1} \circ R^{-\beta}_{O_2} \circ R^{\alpha}_{O_1} \circ R^{\beta}_{O_2}$. Но при этом преобразовании каждый луч l переходит в луч, образующий с ним угол $-\alpha - \beta + \alpha + \beta$, т. е. в луч, параллельный и одинаково направленный с l. Это значит, что $R^{-\alpha}_{O_1} \circ R^{-\beta}_{O_2} \circ R^{\alpha}_{O_1} \circ R^{\beta}_{O_2}$ является параллельным переносом.

Легко доказать, что этот перенос не является нулевым. Для этого достаточно найти точку, которая меняет свое положение. Выясним, куда перейдет при нашем преобразовании точка O_2. Поворот $R^{\beta}_{O_2}$ оставляет ее на месте: $R^{\beta}_{O_2}(O_2) = O_2$. После этого поворот $R^{\alpha}_{O_1}$ переводит O_2 в какую-то точку A, а $R^{-\beta}_{O_2}$ поворачивает A вокруг точки O_2, в результате чего A переходит в точку B, отличную от A. Наконец, надо сделать поворот $R^{-\alpha}_{O_2}$. При этом повороте точка A переходит в точку O_2, а значит, точка B — в какую-то точку C, отличную от O_2. Мы доказали, что $R^{-\alpha}_{O_1} \circ R^{-\beta}_{O_2} \circ R^{\alpha}_{O_1} \circ R^{\beta}_{O_2}(O_2) \neq O_2$, т. е. что параллельный перенос не является нулевым.

Но конечная группа не может содержать такого переноса. Значит, она не может содержать одновременно $R^{\alpha}_{O_1}$ и $R^{\beta}_{O_2}$.

Лемма 4. **Конечная группа G не может содержать осевой симметрии S_l и поворота R^{α}_{O}, центр которого не лежит на прямой l.**

В самом деле, если $S_l \in G$ и $R^{\alpha}_{O} \in G$, то и преобразование $S_l \circ R^{\alpha}_{O} \circ S_l$ принадлежит G. Но при этом преобразовании симметричная с O относительно l точка O_1 остается на месте (сначала она отображается в точку O, потом точка O остается на месте при повороте R^{α}_{O}, а потом O снова отображается в O_1). Остальные же точки плоскости поворачиваются вокруг точки O_1 на угол $-\alpha$ (рис. 84). Значит, $S_l \circ R^{\alpha}_{O} \circ S_l = R^{-\alpha}_{O_1} \in G$. Мы доказали, что вместе с преобразованиями S_l и R^{α}_{O} группа G содержала бы $R^{-\alpha}_{O_1}$, а конечная группа преобразований не может содержать поворотов в округ различных центров.

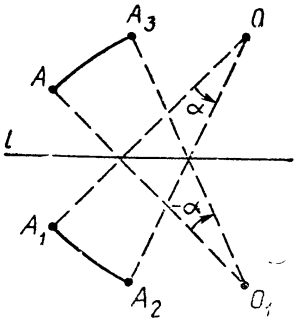


Рис. 84

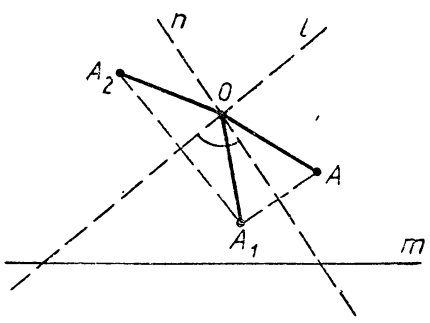


Рис. 85

Лемма 5. **Конечная группа преобразований не может содержать осевых симметрий S_l, S_m, S_n, оси которых не проходят через одну и ту же точку** (т. е. таких, что $l \cap m \cap n = \varnothing$).

В самом деле, предположим, что $l \cap m \cap n = \varnothing$ и симметрии S_l, S_m, S_n принадлежат группе G. Тогда и преобразование $S_n \circ S_l$ принадлежит той же группе. Но при этом преобразовании точка O пересечения осей l и n остается неподвижной (она переходит в себя и при S_l, и при S_n). Остальные же точки поворачиваются вокруг точки O на угол α, вдвое больший угла между l и n (рис. 85). Значит, $S_n \circ S_l = R_O^\alpha$. Получается, что группа G содержит и симметрию S_m и поворот R_O^α, центр которого не лежит на прямой m (поскольку $O \in l \cap n$, а $l \cap n \cap m = \varnothing$). Но тогда группа была бы бесконечна (см. лемму 4). Значит, наше предположение о принадлежности S_l, S_m, S_n конечной группе ложно.

Из лемм 1—5 вытекает, что конечная группа геометрических преобразований может содержать лишь повороты вокруг одного центра O и симметрии относительно прямых, проходящих через эту точку. Теперь мы уже располагаем всеми необходимыми сведениями для того, чтобы доказать следующую теорему Леонардо да Винчи.

Теорема. **Всякая конечная группа геометрических преобразований совпадает либо с одной из групп типа Z_n, либо с одной из групп типа D_n.**

Доказательство. Если группа G состоит лишь из тождественного преобразования E и осевой симметрии S_l, то она принадлежит типу D_1. Если она содержит хотя бы две осевые симметрии S_l и S_m, то, по лемме 2, прямые l и m пересекаются, а тогда группа G содержит поворот $S_m \circ S_l$. Поэтому можно сразу считать, что группа G содержит повороты, причем, по лемме 3, все эти повороты совершаются вокруг одной и той же точки. Обозначим общий центр всех поворотов буквой O.

Так как число поворотов, входящих в группу G, конечно, то среди величин углов этих поворотов есть наименьшее число α.

Это число — делитель 360. Ведь если бы 360 не делилось на α, то нашлось бы такое целое число k, что $k\alpha < 360^\circ < (k+1)\alpha$. Раз поворот вокруг точки O на угол α принадлежит 0°, то и поворот на угол $-k\alpha$, т. е. $0^\circ - k\alpha$, принадлежит G. Этого не может быть, так как $0^\circ \leqslant 360^\circ - k\alpha < \alpha$, а α — наименьшее положительное значение углов поворота из группы G.

Итак, 360 делится на α. Обозначим число $\frac{360^\circ}{\alpha}$ буквой n и заметим, что $(R_O^\alpha)^n = R_O^{n\alpha} = R_O^{360} = E$. Значит, если выполнить поворот R_O^α подряд n раз, то получится тождественное преобразование.

Поворотами $R_O^{k\alpha}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, исчерпывается множество поворотов, принадлежащих группе G. Это доказывается так же, как делимость 360 на α (если $R_O^\beta \in G$, то β делится на α). Если в группе G нет осевых симметрий, то она состоит из этих n поворотов. В этом случае $G = Z_n$.

Осталось разобрать случай, когда группа G, кроме поворотов $R_O^{k\alpha}$, где $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, содержит осевые симметрии. Так как эта группа, по условию, конечна, то, в силу леммы 4, оси симметрии проходят через точку O. Пусть в G есть осевые симметрии S_l и S_m. Тогда группа G должна вместе с ними содержать и их композицию $S_l \circ S_m$, т. е. поворот вокруг точки O на угол $2\widehat{lm}$. Отсюда следует, что $2\widehat{lm} = k\alpha$, т. е. $\widehat{lm} = \frac{k\alpha}{2}$.

Итак, если в G есть осевые симметрии, то оси этих симметрий должны образовывать углы, имеющие величины $\frac{k\alpha}{2}$, где $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Такие симметрии есть, — это преобразования вида $R_O^{k\alpha} \circ S_l$, где l — одна из осей симметрии. Так как эти преобразования меняют направление обхода (S_l его меняет, а $R_O^{k\alpha}$ оставляет неизменным) и имеют неподвижную точку O, то $R_O^{k\alpha} \circ S_l$ — симметрия относительно какой-то оси, проходящей через точку O. Осталось заметить, что и $R_O^{k\alpha} \circ S_l$ и S_m, где $\widehat{lm} = \frac{k\alpha}{2}$ и $O \in m$, переводят прямую l в одну и ту же прямую, проходящую через точку O и образующую с l угол $k\alpha$. Итак, $R_O^{k\alpha} \circ S_l = S_m$ принадлежит G.

Мы доказали, что группа G состоит из тех же преобразований, что и группа D_n (n поворотов вида $R_O^{k\alpha}$, где $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и n осевых симметрий относительно прямых, проходящих через точку O и образующих друг с другом углы вида $\frac{k\alpha}{2}$). Теорема доказана.

По ходу доказательства этой теоремы мы наткнулись на следующий факт: все перемещения из группы D_n можно получить композициями только двух: R_O^α и S_a. В самом деле, $R_O^{m\alpha} = R_O^\alpha \circ \ldots \circ R_O^\alpha$, $S_{a_m} = R_O^{m\alpha} \circ S_a$. Заметим теперь, что если a и b — две соседние оси симметрии из группы D_n, то $S_b \circ S_a = R_O^\alpha$ (или $R_O^{-\alpha}$). Следовательно, любое перемещение из D_n получается композицией из двух симметрий: S_a и S_b; говорят, группа D_n порождена этими двумя симметриями.

Практическое задание. Приставьте одно к другому два вертикально расположенных зеркала под каким-то углом β друг к другу. Рассмотрите изображения в этом двойном зеркале предмета, поднесенного к общему ребру зеркал, например карандаша. Не можете ли вы до эксперимента сказать, сколько изображений этого предмета вы увидите? Рассмотрите случаи $\beta = 90°, 60°, 45°$ (это $\beta = 180°/n$, при $n = 2, 3, 4$) — теоретически и экспериментально. Отметим, что β может быть любым, но только при $\beta = 180°/n$ совокупность всех изображений будет симметричной, имеющей группу симметрий D_n. (Это тоже легко увидеть, плавно меняя угол β.)

Таким образом, одно зеркало дает возможность наблюдать группу D_1, а два зеркала, приставленные под углом $180°/n$ друг к другу, — группу D_n. Приставим теперь друг к другу три одинаковых зеркала так, чтобы они образовали правильную треугольную призму. Получится хорошо известная игрушка — калейдоскоп. Три пары смежных зеркал реализуют каждая группу, так как углы между этими зеркалами равны $60° = 180°/3$. Любой предмет, помещенный внутри этой зеркальной призмы, будет виден вместе с двенадцатью своими отражениями, расположенными по пяти вокруг каждой вершины (три из этих изображений будут общими для двух групп D_3). В действительности изображения предмета будут еще отражаться в «отраженных» зеркалах, и если бы зеркала были идеальными (т. е. не поглощали часть световых лучей), то мы увидели бы впечатляющую картину — бесконечное число правильно расположенных в треугольной решетке зеркал изображений исходного предмета. В калейдоскопах, продающихся в магазинах, вместо зеркал используются обычные плоские стекла: они отражают часть лучей (и довольно большую, если лучи образуют небольшой угол с плоскостью зеркал).

Упражнения

97. На биллиардном столе, имеющем форму прямоугольника $ABCD$, лежат 2 шара, M и N. Определите направление шара M так, чтобы:

а) после соударения с бортом AB шар M ударился бы о шар N,

б) до соударения с шаром M шар N отразился бы последовательно от бортов: 1) AB и CD, 2) AB и BC, 3) AB, BC, CD, DA. (Считайте биллиардные шары точками; напомним, что биллиард-

ный шар отражается от борта так, что «угол падения равен углу отражения».)

6. Плоские решетки. Самые богатые с точки зрения симметрии геометрические фигуры на плоскости — это *орнаменты*, заполняющие всю плоскость и допускающие переносы, в отличие от линейных орнаментов, в двух непараллельных направлениях.

Определение. **Фигура Φ называется плоским орнаментом, если в ее группу симметрий G_Φ входят неколлинеарные параллельные переносы, причем среди всех ненулевых переносов $\vec{c} \in G_\Phi$ существует перенос наименьшей длины.**

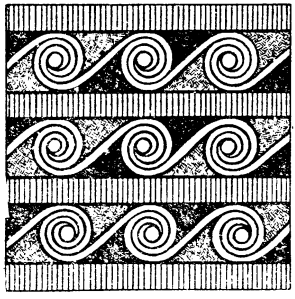
Исходя из этого определения, можно показать, что среди переносов $\vec{c} \in G_\Phi$ можно выбрать два переноса $\vec{a}$ и $\vec{b}$ таких, что любой третий перенос из G_Φ представляется в виде $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, где m и n — целые числа. Заметим, что для произвольной точки A всевозможные точки

$$\vec{c}\,(A) = (m\vec{a} + n\vec{b})\,(A)$$

образуют на плоскости решетки параллелограммов.

Конечно, существует очень много орнаментов; мастера декоративного искусства занимаются созданием орнаментов очень давно. На рисунке 86 вы видите древние орнаменты. На рассмотренных выше примерах вы, однако, можете убедиться, что разные по геометрической форме орнаменты часто имеют одинаково устроенные группы симметрий. Оказывается, существует всего 17 типов плоских орнаментов с различно устроенными симметриями. Эти 17 групп симметрий были известны очень давно; например, еще в XIII веке все они были использованы в украшениях дворца арабских султанов (Альгамбры) в Гранаде. Однако только в 1891 году русский кристаллограф Е. С. Федоров доказал, что таких групп в точности 17; аналогичных пространственных групп симметрий существует 230.

Этими замечаниями мы и закончим наше рассмотрение симметрии в ее простейшей геометрической форме.



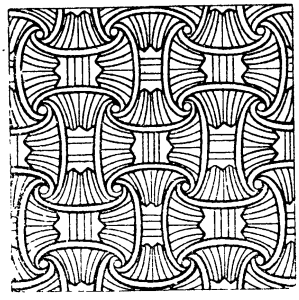


Рис. 86

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. Классическая логика. Умение правильно рассуждать необходимо в любой области человеческой деятельности: науке и технике, юстиции и дипломатии, планировании народного хозяйства и военном деле. Но, хотя это умение восходит к древнейшим временам, логика, т. е. наука о том, какие формы рассуждений правильны, возникла лишь немногим более двух тысяч лет тому назад. Она была развита в IV веке до н. э. в работах великого древнегреческого философа Аристотеля, его учеников и последователей. Аристотель исследовал различные формы суждений и их комбинаций, ввел понятие *силлогизма*, т. е. рассуждения, в котором из заданных двух суждений выводится третье. Примером силлогизма может служить такое рассуждение: «Все млекопитающие имеют скелет. Все киты — млекопитающие. Следовательно, все киты имеют скелет». Ту же форму имеет силлогизм «Все квадраты — ромбы, все ромбы — параллелограммы. Следовательно, все квадраты — параллелограммы». В общем виде этот силлогизм имеет форму: «Все a суть b; все b суть c. Следовательно, все a суть c». А вот пример силлогизма неправильной формы: «Все квадраты — ромбы. Некоторые ромбы имеют острый угол. Некоторые квадраты имеют острый угол». Хотя оба утверждения, из которых был сделан вывод, истинны, сам вывод о существовании квадратов с острым углом ложен. Значит, силлогизм, имеющий форму: «Все a суть b, некоторые b суть c. Значит, некоторые a суть c», может привести и к ложным выводам. Аристотель выделил все правильные формы силлогизмов, которые можно составить из суждений вида: «Все a суть b», «Некоторые a суть b», «Все a не суть b» и «Некоторые a не суть b». Логика, основанная на теории силлогизмов, называется *классической*.

Доказано, что общее число силлогизмов, которые можно составить из суждений указанного выше вида, равно 256. Из них правильными являются лишь 24. Для проверки правильности силлогизмов можно использовать метод, основанный на теории множеств. Суждения, из которых строятся силлогизмы, являются на самом деле высказываниями о множествах. Например, утверждая, что «все a суть b», мы говорим, что множество A всех a — подмножество в множестве B всех b, $A \subset B$. Утверждая, что «некоторые a суть b», мы говорим, что пересечение множеств A и B непусто[1],

[1] Мы предполагаем, что A и B непусты.

$A \cap B \neq \varnothing$. Утверждение «Ни одно a не является b» говорит, что A и B не пересекаются, т. е. $A \cap B = \varnothing$, а утверждение «Некоторые a не являются b» — что A не есть подмножество B, т. е. $A \not\subset B$.

Поскольку множества можно изображать в виде геометрических фигур, логические рассуждения тоже изображаются геометрически. Например, рисунок 1 поясняет, что если все a суть b, а все b суть c, то все a суть c (если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$). Рисунок 2 служит для пояснения силлогизма «Если все a суть b и ни одно b не является c, то ни одно a не является c» (если $A \subset B$ и $B \cap C = \varnothing$, то $A \cap C = \varnothing$). А рисунок 3, a поясняет, почему не годится силлогизм «Все a суть b, некоторые b суть c. Значит, некоторые a суть c», хотя $A \subset B$ и $B \cap C \neq \varnothing$, но $A \cap C$ может быть и пустым множеством. Впрочем, на рисунке 3, $б$ показан случай, когда $A \subset B$, $B \cap C \neq \varnothing$ и $A \cap C \neq \varnothing$, т. е. некоторые a суть c. Это показывает, что неправильно построенное рассуждение не обязательно приводит к ложному выводу: случайно может оказаться и так, что вывод будет истинным. Но логика считает допустимыми только такие формы рассуждений, которые гарантируют истинный результат во всех случаях, когда исходные утверждения истинны. Описанный метод геометрической иллюстрации логических рассуждений был предложен великим математиком XVIII века петербургским академиком Леонардом Эйлером (1707—1783) и широко применялся английским математиком Джоном Венном (1834—1923). Поэтому такие рисунки называют диаграммами Эйлера — Венна. Однако использование диаграмм Эйлера — Венна затруднительно в сложных случаях.

Как известно, в конце XVI века в алгебре словесная форма записи алгебраических выражений стала тормозить развитие науки и, чтобы облегчить выполнение алгебраических преобразова-

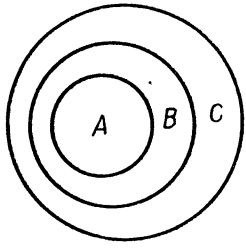


Рис. 1

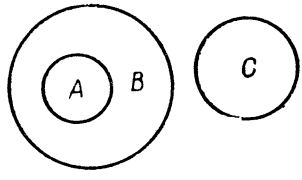
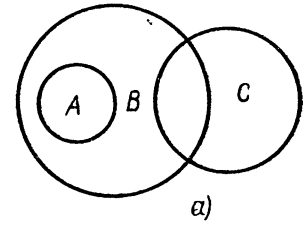
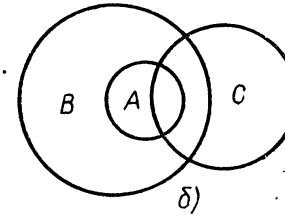


Рис. 2



а)



б)

Рис. 3

ний, была создана буквенная символика, позволяющая выполнять эти преобразования по строго определенным правилам. Точно так же, чтобы облегчить проверку и преобразование сложных цепочек рассуждений, было создано особое буквенное исчисление. Оно получило название алгебры логики или математической логики. Основы математической логики были заложены в XVII веке великим немецким математиком Г. Лейбницем (1646—1716). В середине XIX века ирландский математик и логик Джордж Буль (1815—1864) своими трудами положил начало формированию математической логики как научной дисциплины. В обычной алгебре буквы обозначают числа, а операции над ними символизируют соответствующие операции над числами; в алгебре логики буквы (обычно прописные латинские) обозначают высказывания, а операции над ними символизируют операции над высказываниями. В математической логике, как и в обычной логике, есть тождества, верные для любых высказываний. Нашей первой задачей будет знакомство с основными операциями над высказываниями.

Упражнения

1. Нарисуйте диаграммы Эйлера — Венна, иллюстрирующие суждения:

а) все x являются y;

б) некоторые x являются y;

в) ни одно x не является y;

г) некоторые x не являются y.

2. Докажите, что из предложения «Некоторые x являются y» следует предложение «Некоторые y являются x».

3. Докажите, что если ни одно x не является y, то ни одно y не является x.

4. Изобразите диаграммы Эйлера — Венна, для которых ложны оба высказывания: «Все x являются y» и «Ни одно x не является y».

5. Следует ли из того, что «Все x являются y и некоторые y являются z», утверждение «Некоторые x являются z»?

6. Правильно ли рассуждение, имеющее форму: «Все x являются y и некоторые y являются z; значит, некоторые z являются x»?

7. Правильно ли рассуждение, имеющее форму: «Все x являются y и некоторые y не являются z; значит, некоторые x не являются z»?

8. Правильно ли рассуждение, имеющее форму: «Ни одно x не является y и некоторые y являются z; значит, некоторые z не являются x»?

9. Правильно ли рассуждение, имеющее форму: «Все x являются y и ни одно x не является z; значит, все y не являются z»?

10. Правильно ли рассуждение, имеющее форму: «Если некоторые x являются y, а некоторые y являются z, то некоторые x являются z»?

11. Правильно ли рассуждение, имеющее форму: «Если некоторые y являются x, некоторые y являются z и некоторые z являются x, то некоторые x одновременно являются и y, и z»?

12. Для следующих рассуждений постройте их буквенную форму и проверьте с помощью диаграмм Эйлера — Венна, правильна ли эта форма:

а) если все квадраты являются прямоугольниками, то некоторые прямоугольники не являются квадратами;

б) если ни один кит не может летать, то ни один летающий предмет не является китом;

в) если всех львов можно приручить и все львы — хищники, то всех хищников можно приручить;

г) если некоторых хищников можно приручить и все львы — хищники, то некоторых львов можно приручить;

д) если всех хищников можно приручить и всех львов можно приручить, то все львы — хищники;

е) если всех хищников можно приручить и все львы — хищники, то всех львов можно приручить;

ж) если все зайцы — хищники и ни один заяц не может летать, то некоторые хищники не могут летать;

з) если ни один кит не является рыбой и все щуки — рыбы, то ни одна щука не является китом;

и) если ни один лев не является рыбой и все львы живут на суше, то ни одна рыба не живет на суше.

В каких из этих примеров неправильно построенные рассуждения привели к ложным заключениям? К истинным заключениям? В каких случаях ложные исходные посылки привели к истинным заключениям?

13. Проанализируйте рассуждения, приведенные ниже.

а) Все писатели — деятели искусства. Некоторые деятели искусства — талантливые люди. Значит, некоторые писатели талантливы.

б) Все люди смертны. Все люди — живые существа. Значит, все живые существа смертны.

в) Все кошки являются рыбами; у всех рыб — четыре ноги. Значит, у кошки четыре ноги.

г) Некоторые позвоночные являются млекопитающими, и некоторые позвоночные являются лягушками. Значит, некоторые лягушки — позвоночные.

Какие из этих рассуждений имеют правильную форму? В каких из них истинны посылки? В каких из них истинны заключения? Можно ли из ложных посылок путем правильных рассуждений получить истинное заключение?

2. Высказывания. Основным понятием математической логики является *высказывание*. Так называют любое повествовательное предложение, относительно которого известно, что оно либо *истинно*, либо *ложно*. Высказывания могут быть выражены с помощью

слов, а также математических, химических и прочих знаков. Примеры:

а) Марс дальше от Солнца, чем Венера (истинное высказывание);

б) $2 + 6 > 8$ (ложное высказывание);

в) $II + VI > VIII$ (ложное высказывание);

г) сумма чисел 2 и 6 больше числа 8 (ложное высказывание);

д) в пределах нашей Галактики существуют внеземные цивилизации (это высказывание, несомненно, либо истинно, либо ложно, но пока неизвестно, какая из этих возможностей выполнена).

Ясно, что высказывания б), в) и г) означают одно и то же, но выражены различными знаками и словами. Мы не будем сейчас анализировать смысл исследуемых высказываний, ограничиваясь выяснением того, истинны они или ложны.

Не всякое предложение является высказыванием. Например, восклицательные и вопросительные предложения высказываниями не являются («Какого цвета этот дом?», «Пейте томатный сок!», «Стоп!» и т. д.). Не являются высказываниями и определения, например «Назовем медианой отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны», — здесь лишь устанавливается название некоторого объекта; с тем же успехом можно было бы дать это название иному объекту, скажем лучу, делящему пополам угол при вершине треугольника, или дать тому же объекту иное название. Таким образом, определения не могут быть истинными или ложными, они лишь фиксируют принятое использование терминов.

Не являются высказываниями и предложения «Он сероглаз» или «$x^2 - 4x + 3 = 0$» — в них не указано, о каком человеке идет речь или для какого числа x верно равенство $x^2 - 4x + 3 = 0$. Такие предложения с переменными называют *высказывательными формами*. Мы обсудим их в следующем разделе. Отметим, что предложение «Некоторые люди сероглазы» или «Для всех x справедливо равенство $x^2 - 4x + 3 = 0$» уже является высказыванием (первое из них истинно, а второе ложно).

Упражнения

14. Укажите среди следующих предложений высказывания:

а) Луна — спутник Земли,

б) все учащиеся любят математику,

в) принеси мне, пожалуйста, книгу,

г) некоторые люди имеют голубые глаза,

д) окружностью называется множество всех точек плоскости, расстояние которых до данной точки этой плоскости имеет заданную величину;

е) вы были в театре?

15. Установите, какие из следующих предложений являются истинными, а какие — ложными высказываниями:

а) число -2 меньше числа 0;

б) частное от деления числа 7 на нуль равно 0;
в) сумма чисел 5 и x равна 10;
г) существует такое действительное число x, что $2x + 5 = 15$;
д) $(13 - 2 \cdot 7) \cdot 4 = -4$;
е) все треугольники — равнобедренные;
ж) медианой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону;
з) знаете ли вы украинскую ночь?

16. Выделите среди следующих записей высказывания и определите, истинны они или ложны:

а) $\frac{1917}{852} = \frac{9}{4}$;

б) $675 + 872 > (6^3 + 7^3 + 5^3) + (8^3 + 7^3 + 2^3)$;
в) $8833 < 88^2 + 33^2$;
г) $(4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7}) = 3^2$;
д) $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$;
е) $x^2 - 8x + 15 = 0$;
ж) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$;
з) $\{a\} \in \{a, b, c\}$;
и) $a \subset \{a, b, c\}$;
к) $\{a\} \subset \{a, b, c\}$;
л) $a \in \{a, b, c\}$;
м) $\{a\} \in \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$;
н) $(AB) \parallel (AB)$;
о) $(AB) \perp (AB)$;
п) $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$;
р) всегда $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

3. Простые и сложные высказывания. Некоторые высказывания можно разложить на отдельные части, при этом каждая такая часть будет самостоятельным высказыванием. Например, высказывание «Сегодня в 4 часа дня я был в школе, а к 6 часам вечера пошел на каток» состоит из двух частей: «Сегодня в 4 часа дня я был в школе» и «Сегодня к 6 часам вечера я пошел на каток». Высказывание может состоять и из большего количества частей.

Высказывание, которое можно разложить на части, будем называть *сложным*, а неразложимое далее высказывание — *простым*. Подобно тому как из заданных чисел можно получить другие числа с помощью операций сложения, вычитания, умножения и деления, а также операций перехода к противоположному или обратному числу, из заданных высказываний получаются новые с помощью операций, имеющих специальные названия: «конъюнкция», «дизъюнкция», «импликация», «эквиваленция» и «отрицание высказывания». Хотя названия эти звучат непривычно, они означают лишь хорошо известное соединение отдельных предложений связками «и», «или», «если..., то...», «тогда и только тогда, когда ...» и присоединение к высказыванию частицы «не». Однако если в

обыденной речи употребление этих связок и частиц не подчинено строгим правилам, из-за чего возможны разные толкования одного и того же предложения, то в математической логике смысл каждого слова четко определен, а чтобы обыденное толкование слов не влияло на их употребление, сами связки заменяются особыми знаками.

Упражнения

17. Даны высказывания: A: «Земля вращается вокруг Солнца» и B: «Земля имеет форму шара». Образуйте из данных высказываний сложные и подчеркните слова, при помощи которых они образованы.

18. Среди приведенных ниже высказываний укажите сложные; выделите в них простые, обозначив каждое из них буквой. Запишите с помощью букв каждое сложное высказывание.

а) На уроке математики учащиеся отвечали на вопросы учителя и писали самостоятельную работу.

б) Мы пойдем кататься на коньках или на лыжах.

в) Если в данном четырехугольнике диагонали имеют равную длину, то этот четырехугольник — ромб.

г) $-17 \leqslant 0$.

д) Число 15 делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа делится на 3.

4. Отрицание. Рассмотрим следующие высказывания:

A: «Сегодня в 12 часов дня я был на катке»;

$Б$: «Сегодня я был на катке не в 12 часов дня»;

B: «Я был на катке в 12 часов дня не сегодня»;

$Г$: «Сегодня в 12 часов дня я был в кино»;

$Д$: «Сегодня я был на катке в 3 часа дня»;

E: «Сегодня в 12 часов дня я не был на катке».

На первый взгляд высказывания $Б$ — E отрицают высказывание A. Но на самом деле это не так. Если внимательно вчитаться в смысл высказывания $Б$, то можно заметить, что оба высказывания A и $Б$ могут одновременно оказаться ложными — так будет, если сегодня я совсем не был на катке. То же самое относится и к высказываниям A и B, A и $Г$. А высказывания A и $Д$ могут оказаться и одновременно истинными (если, например, я катался на коньках с 11 до 4 часов дня), и одновременно ложными (если сегодня я совсем не был на катке). И только высказывание E обладает следующим свойством: оно истинно в том случае, когда высказывание A ложно, и ложно в том случае, когда высказывание A истинно. Его называют отрицанием высказывания A.

Вообще, **отрицанием высказывания A называют такое высказывание B, что B ложно, если A истинно, и B истинно, если A ложно.** Отрицание высказывания A обозначают $\overline{A}$ или (не A) (читается «Не A» или «Неверно, что A»).

Следующая таблица показывает связь между высказываниями A и $\overline{A}$:

A	$\overline{A}$
И	*Л*
Л	*И*

Буквы «*И*» и «*Л*» — сокращение слов «истина» и «ложь» соответственно. Эти слова в логике называют *значениями истинности* высказываний.

Обычно для построения отрицания данного высказывания надо присоединить к сказуемому частицу «не» или, если она уже есть, опустить ее. Например, для высказывания «Сейчас небо синее» отрицание будет «Сейчас небо не синее» или «Сейчас небо не является синим». А отрицанием высказывания «Гремучая змея не имеет позвоночника» является высказывание «Гремучая змея имеет позвоночник».

В математике отрицание высказывания, записанного с помощью тех или иных знаков, часто выражают, перечеркивая соответствующий знак или опуская перечеркивающую линию. Например, отрицанием высказывания «$2 + 3 = 5$» является «$2 + 3 \neq 5$», а отрицанием высказывания $a \nparallel b$ является $a \parallel b$. Иногда применяются иные обозначения: отрицанием высказывания $a < b$ является $a \geqslant b$ — неравенство $a < b$ истинно в том и только в том случае, когда $a \geqslant b$ ложно.

Упражнения

19. Постройте отрицания приведенных ниже высказываний. Определите значения истинности этих высказываний и их отрицаний.

а) Число 5 — делитель числа 542.

б) Автомобиль не имеет права ехать вперед на красный свет.

в) Существуют параллелограммы с прямыми углами.

г) Уравнение $2x^2 - 3x + 1 = 0$ имеет целый корень.

д) Все корни уравнения $2x^2 - 3x + 1 = 0$ — целые.

е) Все натуральные числа делятся на 2.

ж) Не существует натурального числа, делящегося на 2.

з) Существует целое число, делящееся на все целые числа.

20. Среди следующих высказываний найдите отрицание высказывания «Существуют четные простые числа»:

а) существуют нечетные простые числа;

б) существуют четные составные числа;

в) любое простое число нечетно;

г) не существует четных простых чисел.

21. Определите, какие из предложений в следующих парах являются отрицаниями друг друга и какие — нет. Объясните почему.

а) $4 < 0$; $4 > 0$. б) $5 < 0$; $5 \geqslant 0$. в) Треугольник ABC

прямоугольный; треугольник ABC остроугольный. г) Натуральное число 6 четно; натуральное число 6 нечетно. д) Он мой друг; он мой враг. е) Все простые числа четны; все простые числа нечетны. ж) Человеку известны все виды животных, обитающих на Земле; на Земле существует вид животных, неизвестный человеку. з) Он мой друг; он друг моего брата.

22. Докажите или опровергните следующие предложения, образовав их отрицания:

а) $2 \leqslant 2$; б) $3 \leqslant 5$; в) все простые числа нечетны; г) ни одно русское слово не содержит более двух одинаковых гласных подряд; д) он мой друг.

5. Конъюнкция и дизъюнкция высказываний. Высказывание «Число 2 четное и простое» сложное; оно состоит из двух высказываний: «Число 2 четное» и «Число 2 простое», связанных союзом «и». Оба эти высказывания истинны. Считают, что и сложное высказывание «Число 2 четное и простое» тоже истинно. Высказывание «Число 12 четное и простое» считается ложным; оно состоит из высказываний: «Число 12 четное» и «Число 12 простое», из которых истинно только первое. Ложным считают и высказывание «Число 12 нечетное и составное», и, конечно, высказывание «Число 12 нечетное и простое», которое состоит из двух ложных простых высказываний: «Число 12 нечетное» и «Число 12 простое», соединенных союзом «и».

Вообще, **если два высказывания A, B связаны друг с другом союзом «и», то полученное сложное высказывание «A и B» считают истинным лишь в том случае, когда оба исходных высказывания истинны. Если же хотя бы одно из них ложно, то сложное высказывание «A и B» считают ложным.**

Высказывание «A и B» истинное, если истинны оба высказывания A и B, и ложное, если хотя бы одно из них ложное, называют *конъюнкцией* этих высказываний и обозначают $A \wedge B$. Таким образом, таблица истинности высказывания $A \wedge B$ (читают «A и B») имеет следующий вид:

A	B	$A \wedge B$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*Л*
Л	*Л*	*Л*

В школьной математике примером конъюнкции высказываний может служить двойное неравенство, например $3 < 6 < 7$. Такое

неравенство считают истинным лишь в том случае, когда истинны оба входящие в него неравенства, в нашем случае это $3 < 6$ и $6 < 7$. Двойное же неравенство $3 < 6 < 4$ ложно, так как хотя $3 < 6$ истинно, но $6 < 4$ ложно. Конъюнкцией является и высказывание «Диагонали любого ромба перпендикулярны и делят углы при вершинах ромба пополам», а также высказывание «Любое составное число разлагается на простые множители, и это разложение однозначно определено с точностью до порядка множителей».

Высказывания можно связать друг с другом не только союзом «и», но и союзом «или», например: «На следующем уроке будет контрольная или самостоятельная работа» (подробнее: «На следующем уроке будет контрольная работа или на следующем уроке будет самостоятельная работа»). «Если последняя цифра числа равна 0 или 5, это число делится на 5» (подробнее: «Если последняя цифра числа равна 0, то это число делится на 5, или если последняя цифра числа равна 5, то это число делится на 5»).

В обыденной речи союз «или» имеет два различных значения — разделительное и неразделительное. Например, если сказать: «Завтра в 12 часов дня я буду в клубе или на катке», то не может быть, чтобы оба обещания оказались выполнены: человек не может быть одновременно в двух местах. Здесь союз «или» разделительный. Но если сказать: «Я буду в клубе завтра в 12 часов дня или в 6 часов вечера», то отнюдь не исключено, что сбудется и то, и другое — человек может посетить клуб дважды в один и тот же день. Здесь тот же союз понимается в неразделительном смысле.

Чтобы устранить эту неопределенность, условились в математической логике использовать лишь неразделительное «или». Таким образом, в математической логике считают, что **высказывание «*A* или *B*» истинно, если истинно хотя бы одно из этих высказываний, и ложно лишь в одном случае — когда оба эти высказывания ложны.** Высказывание «*A* или *B*», ложное лишь в случае, когда ложны оба высказывания *A*, *B*, называют *дизъюнкцией* этих высказываний и обозначают $A \vee B$ (читают «*A* или *B*»). Таким образом, таблица истинности для высказывания $A \vee B$ имеет следующий вид:

A	*B*	$A \vee B$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*И*
Л	*И*	*И*
Л	*Л*	*Л*

В математике примером дизъюнкции высказываний может служить нестрогое неравенство, например $3 \leqslant 7$. Такое неравенство считается истинным, если истинно хотя бы одно из входящих в него высказываний $3 < 7$, $3 = 7$. Поэтому высказывания $3 \leqslant 7$ и $3 \leqslant 3$ истинны (первое — потому, что истинно $3 < 7$, а второе — потому, что истинно $3 = 3$). Неравенство же $7 \leqslant 3$ ложно, так как ложны оба высказывания $7 < 3$ и $7 = 3$. Является дизъюнкцией и высказывание «Данный четырехугольник является прямоугольником или ромбом». Здесь могут оказаться истинными оба высказывания (если четырехугольник является квадратом).

Упражнения

23. Среди следующих сложных высказываний выделите конъюнкции и дизъюнкции и определите, ложны они или истинны:

а) число 27 кратно 3 и 9;

б) $17 < 42 < 18$;

в) число 2 — простое или четное;

г) треугольник ABC является остроугольным, прямоугольным или тупоугольным;

д) треугольник ABC является разносторонним, равнобедренным или равносторонним;

е) диагонали любого параллелограмма перпендикулярны и делят друг друга пополам;

ж) $\sqrt{16} = -4$, но $-4 \neq (-2)^2$;

з) $7^2 = 49$ и $(-7)^2 = 49$;

и) если треугольник равнобедренный, то он равносторонний;

к) окружность не может быть ни вогнутой, ни незамкнутой;

л) $21 \leqslant 21$;

м) $21 \leqslant 18$.

24. Даны высказывания: A: «Я купил велосипед», B: «Я участвовал в соревнованиях по велоспорту», C: «Я путешествовал по СССР». Сформулируйте высказывания, соответствующие следующим выражениям:

а) $A \wedge B$; б) $A \vee B$; в) $\overline{A} \wedge B$; г) $\overline{A} \vee B \vee \overline{C}$;

д) $\overline{A \wedge B}$; е) $\overline{A \vee C}$; ж) $\overline{A} \vee \overline{C}$; з) $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee C$.

25. Пользуясь высказываниями A, B и C, заданными в упражнении 24, запишите с помощью символов алгебры высказываний следующие высказывания:

а) я не путешествовал по СССР;

б) я купил велосипед и участвовал в соревнованиях;

в) я не путешествовал по СССР и не участвовал в соревнованиях;

г) я купил велосипед, но не путешествовал по СССР;

д) я путешествовал по СССР и не участвовал в соревнованиях;

е) я купил велосипед или путешествовал по СССР;

ж) я не купил велосипед или не участвовал в соревнованиях.

6. Импликация и эквиваленция высказываний. Рассуждения чаще всего представляют собой цепочки высказываний. Эти высказывания имеют обычно условный характер, т. е. утверждают, что некое высказывание истинно при условии, что истинно другое, например: «Если у данного треугольника боковые стороны конгруэнтны, то конгруэнтны и углы при основании». В общем виде такие высказывания записываются так: «Если истинно A, то истинно B», или короче: «Если A, то B». Такое высказывание называют *импликацией* высказываний A и B и обозначают $A \to B$. Высказывание A называют *условием*, а B — *заключением*. Например, пусть A: «Сейчас хорошая погода» и B: «Я пойду гулять». Тогда $A \to B$ означает «Если сейчас хорошая погода, то я пойду гулять». Ясно, что если сейчас плохая погода, то сказавшего это предложение нельзя назвать лжецом ни в случае, если он пойдет гулять, ни в случае, если он откажется от прогулки. Поэтому импликацию с ложным условием надо считать истинной как при истинном, так и при ложном заключении. Говорят, что такая импликация истинна тривиальным образом. Истинно высказывание $A \to B$ и в случае, когда A и B истинны. Единственным вариантом, когда импликация $A \to B$ ложна, является истинность условия и ложность заключения.

Итак, **импликацией высказываний A и B называют высказывание $A \to B$ (если A, то B), ложное лишь в случае, когда A истинно, а B ложно.** Таблица истинности для импликации имеет следующий вид:

A	B	$A \to B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Высказывание «A тогда и только тогда, когда B» называют *эквиваленцией* высказываний A и B и обозначают $A \leftrightarrow B$. Считают, что **эквиваленция двух высказываний истинна в том и только в том случае, когда оба эти высказывания истинны или оба они ложны.** Поэтому таблица истинности для эквиваленции высказываний A и B имеет следующий вид:

A	B	$A \leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Упражнения

26. В следующих составных высказываниях выделите составляющие их элементарные высказывания; укажите истинные импликации:

а) если число 48 кратно 8, то оно кратно 4;

б) если $-3 < -1$, то $3^2 = 6$;

в) если $\lg 100 = 10$, то у собаки четыре ноги;

г) если $2 \cdot 2 = 5$, то существуют ведьмы.

27. Даны высказывания:

A: «Четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм»;

B: «Диагонали четырехугольника $MNPQ$ в точке пересечения делятся пополам».

Сформулируйте словами высказывания и установите, истинны они или ложны:

а) $A \to B$; б) $B \to A$; в) $\overline{A} \to B$; г) $\overline{B} \to A$;

д) $\overline{A} \to \overline{B}$; е) $\overline{B} \to \overline{A}$; ж) $A \to \overline{B}$; з) $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

28. Определите значения истинности следующих высказываний:

а) если 16 делится на 4, то 16 делится на 2;

б) если 17 делится на 4, то 17 делится на 2;

в) если 18 делится на 4, то 18 делится на 2;

г) если 18 делится на 2, то 18 делится на 4;

д) если $2 \cdot 2 = 5$, то $8^3 \neq 500$;

е) если $2 \cdot 2 = 4$, то $7^2 = 81$;

ж) если телепатия существует, то некоторые физические законы требуют пересмотра;

з) 16 делится на 4 тогда и только тогда, когда 16 делится на 2;

и) 17 делится на 4 тогда и только тогда, когда 17 делится на 2;

к) 18 делится на 4 тогда и только тогда, когда 18 делится на 2;

л) 15 делится на 5 тогда и только тогда, когда 15 делится на 10.

29. Определите значение истинности A и B при условии, что:

а) «Если 2 — простое число, то A» — истинное высказывание;

б) «Если B, то 2 — составное число» — истинное высказывание;

в) «Если 2 — простое число, то B» — ложное высказывание;

г) «Если A, то 2 — составное число» — ложное высказывание;

д) «$A \leftrightarrow (2 < 3)$» — истинное высказывание;

е) «$B \leftrightarrow (2 > 3)$» — истинное высказывание;

ж) «$A \leftrightarrow (2 > 3)$» — ложное высказывание;

з) «$B \leftrightarrow (2 < 3)$» — ложное высказывание.

30. Даны высказывания:

A: «Число 729 кратно 9»;

B: «Сумма цифр числа 729 кратна 9».

Сформулируйте высказывания:

а) $A \to B$; б) $B \to A$; в) $A \leftrightarrow B$.

31. Известно, что M — высказывание «Треугольник ABC равнобедренный», а N — высказывание «В треугольнике ABC две высоты конгруэнтны».

Рассмотрите высказывания:

а) $M \to N$; б) $N \to M$; в) $M \leftrightarrow N$; г) $(M \to N) \wedge (N \to M)$.

Какие из них истинны, а какие ложны?

7*. Алгебра логики. Из чисел 1, 3, 24, 43 можно с помощью операций сложения, вычитания, умножения и деления составить разнообразные числовые выражения, например: $1 + 3$, $3 \cdot 24 - 43$, $24 : (3 - 1) \cdot 43$ и т. д. Подобно этому, из данных конкретных высказываний A, B, C, D можно с помощью логических операций составить различные составные высказывания, например: $(\overline{A} \vee B) \to (C \wedge \overline{D})$. В школе изучают общие свойства числовых выражений. Эти свойства выражаются в виде равенств, содержащих буквы и истинных при любых предположениях о числовых значениях этих букв, например: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $a + b = b + a$. Часть математики, изучающую общие свойства числовых выражений, называют *алгеброй*. Точно так же *алгеброй логики* называют раздел математической логики, в котором изучают общие свойства выражений, составленных из данных высказываний. Читателю известно, что в обычной алгебре при изучении общих свойств алгебраических операций заменяют числа буквами; например, пишут $ab = ba$ или $a(b + c) = ab + ac$. Мы будем в алгебре логики тоже использовать буквы не только для обозначения конкретных высказываний («Москва — столица СССР», «$2 \cdot 2 = 4$» и т. д.), но и для обозначения *логических переменных*. Тогда буква будет означать переменную, которая может принимать лишь два значения *И* и *Л* (истина и ложь).

Если составить из логических переменных выражение, связав их по определенным правилам символами $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ и знаками отрицания, получится логическое выражение, которое при одних значениях истинности переменных истинно, а при других ложно (например, $A \wedge B$ истинно, если $A = И$ и $B = И$, и ложно, если $A = И$ и $B = Л$). Вычисляя значения истинности выражения при различных комбинациях значений истинности входящих в него логических переменных, получаем таблицу, называемую таблицей истинности данного логического выражения. Например, для выражения $\overline{A} \wedge B$ таблица истинности имеет такой вид:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \wedge B$
И	*И*	*Л*	*Л*
И	*Л*	*Л*	*Л*
Л	*И*	*И*	*И*
Л	*Л*	*И*	*Л*

Может случиться, что для двух внешне различных логических выражений таблицы истинности одинаковы. Например, составим

таблицы истинности для выражений $\bar{A} \vee B$ и $A \to B$:

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$	$A \to B$
И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И

Последние два столбца здесь совпадают. Это значит, что $A \to B$ и $\bar{A} \vee B$ отличаются друг от друга не больше, чем выражения $a + b$ и $b + a$ в обычной алгебре — хотя их форма различна, но при всех значениях входящих в них переменных выражения получают одинаковые значения. В алгебре такие выражения называют равными и пишут $a + b = b + a$. В алгебре логики принято называть такие два логических выражения логически эквивалентными и писать $X \Leftrightarrow Y$. В нашем случае

$$A \to B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B. \qquad (1)$$

Отметим различие между эквиваленцией и эквивалентностью. Эквиваленция является *логической операцией*, позволяющей по двум заданным высказываниям A и B построить новое высказывание $A \leftrightarrow B$; эквивалентность же является *отношением* между двумя составными высказываниями, состоящими в том, что их значения истинности всегда одни и те же. Связь между этими понятиями выражается следующим утверждением:

Логические выражения X и Y эквивалентны в том и только том случае, когда эквиваленция $X \leftrightarrow Y$ истинна при всех значениях логических переменных.

Например, доказанное выше равенство (1) можно иначе сформулировать так:

Эквиваленция

$$(\bar{A} \vee B) \leftrightarrow (A \to B) \qquad (2)$$

истинна при любых предположениях об истинности A и B.

Логические выражения, истинные при любых значениях истинности входящих в них переменных, называют *тавтологиями* (от греческого *тауто* — то же самое и *логос* — слово).

Подобно тому как вся буквенная алгебра основана на нескольких основных равенствах ($a + b = b + a, a + (b + c) = (a + b) + c$, $ab = ba$ и т. д.), выражающих основные свойства арифметических операций, алгебра логики основана на нескольких эквивалентностях. Большинство из них самоочевидно, причем любую из этих эквивалентностей можно легко проверить, составив таблицы истинности. Приведем список этих основных эквивалентностей. Начнем с эквивалентностей, содержащих лишь одну операцию

дизъюнкции или конъюнкции:

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A; \tag{3}$$
$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A; \tag{4}$$
$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C); \tag{5}$$
$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C). \tag{6}$$

Эти эквивалентности показывают, что свойства операций конъюнкции и дизъюнкции напоминают свойства операций сложения и умножения чисел. Для чисел эти операции связаны друг с другом соотношением $a(b + c) = ab + ac$, выражающим дистрибутивность умножения относительно сложения. В то же время для чисел, вообще говоря, соотношение $a + bc = (a + b)(a + c)$ неверно, т. е. сложение не является дистрибутивным относительно умножения. Для высказываний же верны обе эквивалентности:

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \tag{7}$$
$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C), \tag{8}$$

т. е. дизъюнкция дистрибутивна относительно конъюнкции, а конъюнкция — относительно дизъюнкции.

При операциях над числами особую роль играют 0 и 1: для любого числа a верны равенства $a + 0 = a$, $0 \cdot a = 0$ и $a \cdot 1 = a$. Подобную роль играют в алгебре логики высказывания *И* и *Л*, где через *И* обозначено заведомо истинное высказывание и через *Л* — заведомо ложное высказывание. Легко проверить, что для любого высказывания A справедливы соотношения

$$И \wedge A \Leftrightarrow A,\ И \vee A \Leftrightarrow И,\ Л \wedge A \Leftrightarrow Л,\ Л \vee A \Leftrightarrow A. \tag{9}$$

Отметим еще, что для любого высказывания A имеем

$$A \wedge A \Leftrightarrow A \vee A \Leftrightarrow A. \tag{10}$$

Выведем теперь эквивалентности, содержащие операцию отрицания высказывания. Отрицанием высказывания $\overline{A}$ (обозначают $\bar{A}$) является исходное высказывание A, т. е.

$$\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A. \tag{11}$$

Эквивалентность (11) легко проверить, составив таблицу истинности. Из соотношения (11) вытекает, что $\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow \overline{A}$ и т. д. Это позволяет упрощать выражения, содержащие знак отрицания.

С помощью таблицы истинности доказывается, что

$$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}. \tag{12}$$

Точно так же доказывают, что

$$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}. \tag{13}$$

Легко доказать, что

$$A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow Л. \tag{14}$$

Эта эквивалентность означает, что не могут быть одновременно истинными высказывание A и его отрицание $\overline{A}$. Например, заведомо

ложно высказывание «Федя Петров учится в нашей школе, и он не учится в нашей школе».

Применяя к эквивалентности (14) правило (12) и учитывая, что $\overline{Л} \Leftrightarrow И$ (отрицание заведомо ложного высказывания заведомо истинно), получаем, что $\overline{A \wedge \overline{A}} \Leftrightarrow И$, т. е. $\overline{A} \vee \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow И$. Иными словами

$$A \vee \overline{A} \Leftrightarrow И. \tag{15}$$

Эта эквивалентность означает, что всегда истинно или данное высказывание, или его отрицание. Например, если кто-нибудь скажет: «Федя Петров учится в нашей школе или он не учится в нашей школе», то он будет прав в любом случае.

Теперь рассмотрим эквивалентности, содержание операции импликации и эквиваленции. Мы уже доказали ранее, что

$$A \to B \Leftrightarrow \overline{A} \vee B. \tag{1}$$

Иными словами, сказать «Если A, то B» — все равно что сказать «Не A или B». Применяя к этому равенству правило (13), получаем, что

$$\overline{A \to B} \Leftrightarrow \overline{\overline{A} \vee B} \Leftrightarrow \overline{\overline{A}} \wedge \overline{B} \Leftrightarrow A \wedge \overline{B}.$$

Таким образом,

$$\overline{A \to B} \Leftrightarrow A \wedge \overline{B}. \tag{16}$$

Это равенство показывает, что опровергнуть импликацию можно лишь единственным образом — доказав, что ее условие истинно, а заключение ложно (впрочем, мы и так знаем, что лишь в этом случае импликация ложна).

Из истинности данной импликации отнюдь не вытекает, что импликация, полученная перестановкой условия и заключения, тоже окажется истинной. Например, истинно, что «если число 12 делится на 5, то оно делится на 3», так как здесь условие «12 делится на 5» ложно. А переставив местами условие и заключение, получим ложную импликацию. «Если число 12 делится на 3, то оно делится на 5» — здесь условие истинно, а заключение ложно.

Импликацию $B \to A$, полученную из $A \to B$ перестановкой условия и заключения, называют *обратной* для $A \to B$. Другую импликацию можно получить из $A \to B$, заменив и условие, и заключение их отрицаниями. Ее называют *противоположной* данной. Например, для импликации «Если последняя цифра числа 12 равна 5, то это число делится на 3» противоположна импликация «Если последняя цифра числа 12 отлична от 5, то это число не делится на 3». Она тоже ложна: ведь последняя цифра числа 12 отлична от 5, а это число делится на 3. А если одновременно заменить условие и заключение их отрицаниями и поменять их роли, то получится истинное высказывание «Если число 12 не делится на 3, то его последняя цифра отлична от 5» (оно истинно тривиальным образом, так как ложно условие «Число 12 не делится на 3»).

Вообще, импликации $A \to B$ и $\overline{B} \to \overline{A}$ либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. Таким образом, справедлива эквивалентность

$$A \to B \Leftrightarrow \overline{B} \to \overline{A}. \qquad (17)$$

Смысл этой эквивалентности состоит в том, что, доказав утверждение «Из A следует B», можно доказать, что из отрицания $\overline{B}$ следует отрицание $\overline{A}$.

С помощью таблицы истинности легко установить, что

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})]. \qquad (18)$$

Значит, эквиваленция $A \leftrightarrow B$ истинна в том и только в том случае, когда либо A и B истинны, либо A и B ложны (это согласуется с таблицей истинности для $A \leftrightarrow B$). Далее,

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow [(A \to B) \wedge (B \to A)]. \qquad (18')$$

Применяя правило отрицания конъюнкции и дизъюнкции, получаем:

$$\overline{(A \leftrightarrow B)} \Leftrightarrow \overline{(\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})} \Leftrightarrow \overline{\overline{A} \vee B} \vee \overline{A \vee \overline{B}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\overline{\overline{A}} \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{\overline{B}}) \Leftrightarrow (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B). \qquad (18'')$$

Значит, эквиваленция $A \leftrightarrow B$ ложна в том и только том случае, когда или A истинно, а B ложно, или A ложно, а B истинно.

Эквивалентности (1) и (18) позволяют заменять в любом логическом выражении операции импликации и эквиваленции операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Можно еще дальше пойти по пути сокращения числа необходимых логических операций — ведь дизъюнкцию можно заменить операциями отрицания и конъюнкции: $A \vee B \Leftrightarrow \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$. Так что остаются лишь две операции — отрицание и конъюнкция.

С помощью таблиц истинности легко доказать далее, что

$$Л \to A \Leftrightarrow И, \qquad A \to И \Leftrightarrow И. \qquad (19)$$

Эти эквивалентности означают, что любое высказывание следует из заведомо ложного высказывания, а заведомо истинное высказывание следует из любого высказывания.

Доказанные выше эквивалентности позволяют преобразовывать логические выражения, содержащие логические переменные, подобно тому как тождества обычной алгебры позволяют преобразовывать буквенные выражения.

Пример 1. Упростим выражение $\overline{\overline{A \wedge B} \vee (B \wedge C)}$. По правилам отрицания дизъюнкции и конъюнкции и равенству (11) имеем:

$$\overline{\overline{(A \wedge B)} \vee (B \wedge C)} \Leftrightarrow \overline{\overline{A \wedge B}} \wedge \overline{(B \wedge C)} \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge (\overline{B} \vee \overline{C}).$$

А теперь используем соотношения (5) и (7):

$$(A \wedge B) \wedge (\overline{B} \vee \overline{C}) \Leftrightarrow [(A \wedge B) \wedge \overline{B}] \vee [(A \wedge B) \wedge \overline{C}] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [A \wedge (B \wedge \overline{B})] \vee [(A \wedge B) \wedge \overline{C}].$$

Так как $B \wedge \overline{B} \Leftrightarrow Л$, а $A \wedge Л \Leftrightarrow Л$, то $(A \wedge B) \wedge (\overline{B} \vee \overline{C}) \Leftrightarrow Л \vee$ $\vee [(A \wedge B) \wedge \overline{C}]$. Наконец, согласно (9), наше выражение эквивалентно $A \wedge B \wedge \overline{C}$, т. е. оно истинно лишь в одном случае, когда A и B истинны, а C ложно (мы опустили скобки в окончательном выражении, так как в силу свойства ассоциативности конъюнкции они несущественны). К тому же ответу можно было прийти путем логического анализа выражения (оно истинно лишь в случае, когда ложно выражение $\overline{A \wedge B} \vee (B \wedge C)$, а это имеет место лишь при условии, что $A \wedge B$ истинно, а $B \wedge C$ ложно, и т. д.

Пример 2. Выразите через операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания разделительное «или» («либо A, либо B»).

Для разделительного «или» таблица истинности имеет вид:

A	B	либо A, либо B
И	*И*	*Л*
И	*Л*	*И*
Л	*И*	*И*
Л	*Л*	*Л*

Ту же таблицу истинности имеет выражение $(A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$ (мы берем строки, у которых в последнем столбце стоит буква «*И*», составляем ту из конъюнкций переменных A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, которая истинна при данных значениях истинности A и B, и берем дизъюнкцию полученных выражений).

Упражнения

32. Из простых высказываний

A: «Завтра будет дождь»;

B: «Мы пойдем в театр»;

C: «Завтра будет солнечно»;

D: «Завтра занятия начнутся раньше обычного»

образованы следующие составные высказывания:

а) если завтра будет дождь, то занятия начнутся раньше обычного, и мы пойдем в театр;

б) завтра будет солнечно или будет дождь, и занятия начнутся раньше обычного;

в) завтра занятия начнутся раньше обычного, и мы пойдем в театр тогда и только тогда, когда не будет дождя и будет солнечно.

Запишите данные сложные высказывания, используя символы алгебры логики.

33. Каждое из простых высказываний, входящее в приведенные ниже сложные высказывания, обозначьте буквой и запишите эти составные высказывания в символической форме.

а) Если прямая AB перпендикулярна прямым CD и KL, то прямые CD и KL параллельны.

б) Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны попарно параллельны, или тогда, когда его диагонали конгруэнтны.

в) Я сделаю зарядку и, если будет хорошая погода, поеду за город.

г) Четырехугольник является квадратом тогда и только тогда, когда его стороны и все его углы конгруэнтны.

д) Две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда они не имеют общих точек или совпадают.

е) Если $c > a$, $c > b$ и $c^2 \neq a^2 + b^2$, то неверно, что треугольник со сторонами a, b, c — прямоугольный.

ж) $x^2 - 5x + 6 = 0$, откуда $x = 2$, $x = 3$.

з) $|x| < 2$, откуда $x > -2$, $x < 2$.

и) $|x| > 2$, откуда $x > 2$, $x < -2$.

(В трех последних предложениях нужно выявить подразумеваемые логические связки.)

34. Для каждого из следующих выражений придумайте по два предложения соответствующей логической структуры:

$A \to \overline{B}$; $\overline{A \wedge B} \leftrightarrow (\overline{A} \vee \overline{B})$; $\overline{A \vee B} \leftrightarrow (\overline{A} \wedge \overline{B})$;

$\overline{A} \to (B \wedge \overline{C})$; $(\overline{A} \to B) \vee C$.

35. Докажите, что следующие выражения являются тавтологиями:

а) $(\overline{A} \to A) \to A$;

б) $(\overline{A} \to Л) \to A$;

в) $(И \to A) \to A$;

г) $[(A \to B) \wedge \overline{B}] \to \overline{A}$;

д) $[A \wedge (A \to B)] \to B$;

е) $[(A \to B) \wedge (B \to C)] \to (A \to C)$;

ж) $\overline{A} \to (A \to B)$;

з) $[(A \wedge B) \to C] \leftrightarrow [A \to (B \to C)]$;

и) $[(A \vee B) \wedge \overline{A}] \to B$;

к) $A \vee (\overline{A} \wedge B) \vee (\overline{A} \vee \overline{B})$.

36. Составьте таблицы истинности для следующих выражений:

а) $(\overline{A} \to B) \vee (A \wedge B)$; б) $\overline{A \vee B} \to (A \leftrightarrow \overline{C})$;

в) $((A \to B) \to C) \wedge (D \to A)$; г) $(A \wedge B) \to (B \vee A)$;

д) $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$.

Установите, какие из них являются тавтологиями.

37. Для каждой тавтологии из упражнения 35 придумайте по два соответствующих ей высказывания.

38. Дайте определение всегда ложного выражения по аналогии с определением всегда истинного выражения (тавтологии).

39. Установите, являются ли отрицаниями друг друга следующие предложения:

а) высказывание A истинно, высказывание A ложно;

б) выражение X всегда истинно, выражение X всегда ложно.

40. Докажите следующие эквивалентности:

а) $(A \wedge B) \vee A \Leftrightarrow A$;

б) $(A \vee B) \wedge A \Leftrightarrow A$;

в) $(A \vee B) \wedge \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge B$;

г) $(A \wedge B) \vee \overline{A} \Leftrightarrow B \vee \overline{A}$;

д) $(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) \Leftrightarrow A$;

е) $(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) \Leftrightarrow A$.

41. Упростите выражения:

а) $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{D}) \vee (A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee \overline{(A \wedge D) \rightarrow B}$;

б) $(A \wedge B) \vee \overline{\overline{A} \rightarrow B}$;

в) $(A \wedge B \wedge C \wedge \overline{A}) \vee (D \wedge B \wedge \overline{D}) \vee (B \wedge C)$.

42. Согласно инструкции капитан должен находиться на судне всегда, за исключением случаев, когда с судна выгружают груз; если же груз не выгружают, то рулевой никогда не отсутствует, если не отсутствует и капитан. В каких случаях рулевой обязан присутствовать на судне?

43. Двое друзей гуляют по дороге, имеющей форму окружности. Недалеко от центра этой окружности стоят четыре шеста одинаковой высоты с флажками одинаковой величины, но разного цвета. Радиус окружности довольно большой. Когда друзья обошли весь периметр окружности, они подвели итог своим наблюдениям: «Когда виден красный флажок, то или одновременно видны еще желтый и зеленый (и, быть может, синий), или же не виден зеленый, но зато виден синий (и, быть может, желтый). Если же не виден красный флажок, то не виден и желтый, но тогда одновременно видны зеленый и синий». Докажите, что шесты, на которых находятся красный, желтый и зеленый флажки, расположены на одной прямой, причем желтый флажок находится между красным и зеленым, а шест с синим флажком не лежит на этой прямой.

44. Сигнальная установка имеет три лампочки: красную, зеленую и желтую. Длительное наблюдение за этой установкой выявило следующие сочетания:

а) светят все три лампочки;

б) светят красная с желтой;

в) светят зеленая с желтой;

г) светит одна зеленая;

д) светит одна желтая.

Что можно сказать о внутренних свойствах электрической сети, приводящей в действие эти лампочки, не заглядывая внутрь установки?

45. В каждой из приведенных ниже импликаций выделите условие и заключение. Сформулируйте импликацию, противоположную данной и обратную противоположной. Определите, истинны они или ложны.

а) Если вы находитесь в Африке, то вы находитесь южнее Москвы.

б) Если я учусь в школе, то мне больше, чем два года.

в) Если последняя цифра числа 17 равна 5, то оно делится на 5.

г) Если сумма цифр числа 25 делится на 3, то это число делится на 3.

д) Если сумма цифр числа 23 делится на 5, то это число делится на 5.

46. Составьте выражения, соответствующие данным таблицам истинности, и упростите их.

A	*B*	*C*	*X*	*Y*
И	*И*	*И*	*И*	*Л*
И	*И*	*Л*	*Л*	*Л*
И	*Л*	*И*	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*	*Л*	*И*
Л	*И*	*И*	*И*	*И*
Л	*И*	*Л*	*И*	*Л*
Л	*Л*	*И*	*Л*	*Л*
Л	*Л*	*Л*	*И*	*И*

47. Один логик попал в плен к пиратам и был заключен в пещеру, имеющую два выхода. Атаман пиратов предложил логику следующий шанс на спасение: «Один выход ведет на свободу, другой — на верную смерть. Ты можешь выбрать любой. Сделать выбор тебе помогут два моих пирата, одному из которых ты можешь задать единственный вопрос. Но предупреждаю тебя, что один из этих пиратов всегда говорит правду, а другой всегда лжет». После недолгого размышления логик задал вопрос, ответ на который позволил ему безошибочно выбрать выход, ведущий на свободу. Что это был за вопрос?

8*. Логическое следование. Эквивалентность логических выражений играет в алгебре логики примерно ту же роль, что и тождественное равенство буквенных выражений в обычной алгебре. Но в обычной алгебре наряду с тождественными равенствами встречаются тождественные неравенства (например, для любых действительных чисел a и b имеем $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$). Сходную роль в алгебре логики играет *отношение логического следования*. Мы знаем, например, что если истинно A, то, независимо от истинности или ложности B, дизъюнкция $A \vee B$ истинна. В этом случае говорят, что $A \vee B$ логически следует из A. А если истинна конъюнкция $A \wedge B$, то истинно и A. Говорят, что A логически следует из $A \wedge B$.

В общем виде отношение логического следования определяют так: **логическое выражение Y следует из логического выражения X, если Y истинно во всех случаях, когда X истинно.** Отношение

логического следования обозначают так: $X \Longrightarrow Y$ (из X логически следует Y).

Так же, как надо различать эквиваленцию и эквивалентность, не следует путать импликацию с логическим следованием. Импликация — это логическая операция, позволяющая по двум заданным высказываниям A и B строить третье высказывание $A \to B$. А логическое следование — отношение, имеющее место между двумя логическими выражениями. Связь между импликацией и логическим следованием дается следующим утверждением:

Логическое выражение Y следует из логического выражения X в том и только в том случае, когда импликация $X \to Y$ истинна при всех значениях переменных (т. е. является тавтологией). Не составляет труда показать, что если $X \Longrightarrow Y$ и $Y \Longrightarrow X$, то $X \Leftrightarrow Y$ (если Y логически следует из X, а X логически следует из Y, то X и Y логически эквивалентны).

Рассуждения, которыми обычно пользуются при доказательствах теорем, основаны на понятии логического следования — из некоторых высказываний логически выводятся другие высказывания. При этом можно быть уверенным, что при всех значениях логических переменных, при которых истинны исходные высказывания (так называемые посылки), истинны и полученные следствия (или, как говорят, заключения). Разумеется, чтобы гарантировать истинность заключений, надо быть уверенным в истинности посылок. Здесь можно повторить слова, сказанные английским естествоиспытателем Т. Гексли о математике:

«Математика, подобно жернову, перемалывает лишь то, что в него засыпают. И как великолепнейшая в мире мельница не доставит пшеничной муки из лебеды, так и страницы формул не доставят истинного результата по сомнительным данным».

Точно так же самые логичные рассуждения, основанные на неверных посылках, не гарантируют истинности заключений.

Пользуясь тавтологиями, указанными в п. 7 (см., в частности, упражнение 35), получаем следующие правила логического вывода:

$$И \to X \Longrightarrow X; \tag{20}$$
$$\overline{X} \to Л \Longrightarrow X; \tag{21}$$
$$\overline{X} \to X \Longrightarrow X; \tag{22}$$
$$X \wedge (X \to Y) \Longrightarrow Y; \tag{23}$$
$$(X \to Y) \wedge \overline{Y} \Longrightarrow \overline{X}; \tag{24}$$
$$(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \Longrightarrow X \to Z. \tag{25}$$

Правило (20) показывает, что для доказательства истинности высказывания X достаточно показать, что истинна импликация $И \to X$, т. е. достаточно вывести его из истинного высказывания. Правило (21) означает, что для вывода высказывания X достаточно показать, что отрицание этого высказывания влечет за собой ложное высказывание. Это лежит в основе известного метода доказательства от противного. Другой вариант доказательства этим мето-

дом дает правило (22) — достаточно вывести из отрицания высказывания X само это высказывание. Правило (23) носит название modus ponens или опущения посылки. Оно показывает, что если истинно X и истинно, что из X следует Y, то истинно Y.

Примером логического вывода по схеме (23) может служить такое рассуждение: «Если данный треугольник равнобедренный, то его высота делит угол при вершине пополам. Но этот треугольник равнобедренный, а потому его высота делит угол при вершине пополам».

Отметим, что $((X \to Y) \wedge Y) \to X$ не является тавтологией, а потому из истинности $X \to Y$ и Y не следует истинность X. Поэтому из $(X \to Y) \wedge Y$ не следует логически X.

Особое значение в логике имеет схема рассуждений (21): если из X следует Y, а из Y следует Z, то отсюда логически вытекает, что из X следует Z. Примером такого рассуждения может служить:

«Если число 40 оканчивается цифрой 0, то оно делится на 10, а если оно делится на 10, то оно делится на 5. Значит, если число 40 оканчивается цифрой 0, то оно делится на 5».

Упражнения

48. Проверьте, какие из следующих высказываний истинны:

а) $X \wedge Y \Longrightarrow X$, б) $X \Longrightarrow X \wedge Y$, в) $X \vee Y \Longrightarrow X$, г) $X \Longrightarrow X \vee Y$, д) $(X \to Y) \Longrightarrow X \wedge Y$, е) $(X \to Y) \Longrightarrow (Y \to X)$, ж) $(X \to Y) \Longrightarrow \Longrightarrow (\overline{X} \to \overline{Y})$, з) $(X \to Y) \Longrightarrow (\overline{Y} \to \overline{X})$, и) $(X \to Y) \wedge \overline{X} \Longrightarrow \overline{Y}$.

49. Запишите в формализованном виде ниже приведенные рассуждения и проверьте, правильна ли их форма.

а) Если четырехугольник $ABCD$ — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны. Четырехугольник $ABCD$ — ромб. Следовательно, его диагонали взаимно перпендикулярны.

б) Если 10 делится на 3, то 100 делится на 3. 10 делится на 3. Следовательно, 100 делится на 3.

в) Если 10 делится на 2, то 100 делится на 2. 100 делится на 2. Следовательно, 10 делится на 2.

г) Если множество простых чисел конечно, то существует наибольшее простое число. Наибольшего простого числа не существует. Следовательно, множество простых чисел бесконечно.

50. Ответьте на приведенные ниже вопросы.

а) Что можно утверждать о правильности двух рассуждений, которые в формализованном виде выглядят одинаково?

б) Может ли правильное по форме рассуждение иметь ложное заключение? Может ли неправильное по форме рассуждение иметь истинное заключение?

в) Что можно утверждать о заключении правильного по форме рассуждения, если все его посылки истинны?

г) Что можно утверждать о посылках правильного по форме рассуждения, если его заключение ложно?

д) Что можно утверждать о рассуждении, все посылки которого истинны, а заключение ложно?

51. Можно ли на основании посылок «Если предмет интересен, то он полезен» и «Предмет неинтересен» заключить, что предмет бесполезен? Почему?

52. Можно ли, исходя из посылки «Если ученик много занимается, то он успешно сдает экзамены», сделать заключение, что ученик, провалившийся на экзамене, занимается мало? Всегда ли такое заключение истинно? Почему?

53. Считая утверждения «В хоккей играют настоящие мужчины» и «Трус не играет в хоккей» соответственно посылкой и заключением правильного рассуждения, сформулируйте подразумеваемую вторую посылку. Проверьте правильность полученного рассуждения.

54. Проверьте приведенные ниже рассуждения.

а) Если я пойду завтра на первое занятие, то должен буду встать рано, а если пойду вечером на танцы, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно, а встану рано, то буду вынужден довольствоваться пятью часами сна. Я просто не в состоянии обойтись пятью часами сна. Следовательно, я должен пропустить первое занятие или не ходить на танцы.

б) Если сегодня вечером будет мороз, я пойду на каток. Если завтра будет оттепель, я пойду в музей. Сегодня вечером будет мороз или завтра будет оттепель. Следовательно, я пойду на каток и в музей.

в) Галя и Борис одного возраста или Галя старше Бориса. Если Галя и Борис — ровесники, то Оля и Борис разного возраста. Если Галя старше Бориса, то Борис старше Коли. Следовательно, Оля и Борис разного возраста или Борис старше Коли.

55. Задача о порядке утверждения проектов.

Три цеха A, B и C договорились о порядке утверждения проектов: 1) если цех B не участвует в утверждении проекта, то не участвует и цех A; 2) если цех B участвует в утверждении проекта, то участвуют цехи A и C. Обязан ли при этих условиях цех C принимать участие в утверждении проекта, когда в нем принимает участие цех A?

9*. Переключательные схемы. Алгебра логики кажется на первый взгляд очень далекой от практических приложений. Но это не так. Во многих технических проблемах большую роль играют релейно-контактные схемы. Современные методы анализа и конструирования таких схем широко используют понятия и формулы алгебры логики.

Разберем простейшие примеры. Пусть цепь состоит из источника тока I, соединенного с лампой L посредством проводов с ключом P (рис. 4). Ключ P может быть либо включен, либо выключен, и, в соответствии с этим, цепь будет либо замкнута, либо разомкнута. Сопоставим ключу P переменную X, а двум состояниям ключа — «включен», «выключен» — значения «*И*» и «*Л*» переменной X, со-

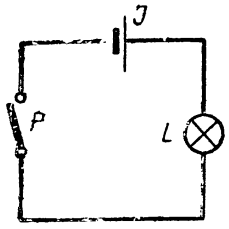


Рис. 4

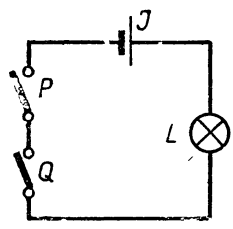


Рис. 5

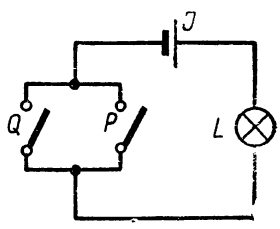


Рис. 6

ответственно; значение «*И*» при этом будет соответствовать также состоянию цепи «замкнута», а «*Л*» — состоянию цепи «разомкнута».

Если между источником тока и лампой поместить два ключа P и Q (рис. 5), соединенные последовательно, то цепь будет замкнута, когда оба ключа включены, и разомкнута, когда хотя бы один из них выключен. Конъюнкция переменных X и Y, поставленных в соответствие ключам P и Q, истинна (цепь замкнута), когда обе переменные X и Y истинны (т. е. P и Q включены), и ложна (цепь разомкнута), когда хотя бы одна из переменных ложна (хотя бы один ключ выключен). Таким образом, выражение $X \wedge Y$ описывает работу цепи, изображенной на рис. 5.

Если два ключа P и Q соединены с источником тока I и потребителем L параллельно (рис. 6), то цепь замкнута, когда хотя бы один из ключей включен, и разомкнута, когда оба они выключены. Работу такой цепи описывает дизъюнкция $X \vee Y$ переменных, соответствующих ключам P и Q. Выражение $X \vee Y$ истинно (цепь замкнута), когда хотя бы одна из переменных истинна (хотя бы один из ключей включен), и ложно (цепь разомкнута), когда обе переменные ложны (оба ключа выключены).

Установленные соответствия дают возможность описать любую цепь с последовательно или параллельно соединенными логическими выражениями. С другой стороны, любое логическое выражение можно смоделировать в виде соответствующей цепи.

Упражнения

56. Нарисуйте схему цепи, соответствующей выражению
а) $(X \vee Y) \wedge (Z \vee X) \wedge Z$; б) $X \vee (X \wedge Y) \wedge (Y \to Z)$.

57. Составьте выражение, соответствующее схеме, изображенной на рисунке 7, и упростите его; сформулируйте условия, при которых цепь замкнута. Начертите схему, соответствующую упрощенному выражению.

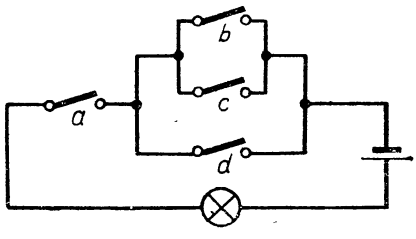


Рис. 7

58. Начертите схему простейшей цепи, условия работы которой заданы следующей таблицей истинности:

X	Y	Z	F
И	*И*	*И*	*И*
И	*И*	*Л*	*И*
И	*Л*	*И*	*Л*
И	*Л*	*Л*	*И*
Л	*И*	*И*	*Л*
Л	*И*	*Л*	*Л*
Л	*Л*	*И*	*И*
Л	*Л*	*Л*	*Л*

Указание. Составьте выражение, соответствующее этой таблице; выполните всевозможные упрощения.

59. Комитет, составленный из трех членов, выносит решение большинством голосов при тайном голосовании. Составьте такую схему, чтобы голосование каждого члена «за» производилось нажатием кнопки (включением ключа) и в случае принятия решения (и только в этом случае) загоралась сигнальная лампочка.

ВЫСКАЗЫВАТЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1. Высказывательные формы. До сих пор мы рассматривали элементарные высказывания как единое целое и интересовались лишь тем, истинны они или ложны. С этой точки зрения нет разницы между высказываниями «Все люди имеют сердце» и «Некоторые люди синеглазы» — оба они истинны. Но эти высказывания отличны по форме: в первом из них утверждается, что некоторые свойства присущи всем людям, а во втором речь идет о свойстве, которым обладают лишь некоторые из них. Анализ этих высказываний показывает, что они состоят из трех частей. Одной из них является подлежащее «люди». Оно характеризует то множество объектов, относительно свойств которого и делается данное высказывание. Второй частью является сказуемое «имеют сердце» или «синеглазы». По-латыни сказуемое называют *предикатом*. Наконец, в эти высказывания входят слова «все» или «некоторые», характеризующие количество элементов с данным свойством. По-латыни «сколько» называется «quantum», и потому эти слова называют *кванторами*.

Итак, высказывания, касающиеся свойств некоторого множества, состоят из трех частей: описания этого множества, указания свойств (предиката) и квантора, показывающего, обладают ли этим свойством все элементы множества или лишь некоторые из них. Таким высказыванием можно придать следующую форму: «Для всех x из множества X (или для некоторых x из множества X) выполняется предикат P». Из этого высказывания можно выделить часть «x обладает свойством P, причем принадлежит множеству X». Эту часть называют *высказывательной формой* и обозначают $P(x)$,

$x \in X$. Высказывательная форма не является высказыванием: поскольку мы не знаем, какой элемент x выбран из множества X, нельзя сказать, истинно или нет, что x обладает свойством P. Лишь подставив вместо x определенный элемент a из X, мы получаем высказывание, которое обозначают $P(a)$.

Примерами высказывательных форм могут служить предложения:

а) человек x рыжеволос;

б) ученик нашего класса x рыжеволос;

в) число x больше семи;

г) натуральное число x больше семи;

д) река x впадает в Каспийское море;

е) протекающая в европейской части СССР река x впадает в Каспийское море.

В этих предложениях уже отмечено, какому множеству принадлежит x (множеству всех людей в предложении 1), множеству учеников нашего класса в предложении 2) и т. д.). Если это множество в предложении не выделено, то его надо указать отдельно; например, писать: $x > 7$, где $x \in N$.

Из этих высказывательных форм можно получить различные высказывания, придавая переменной x те или иные значения. Например, заменяя в предложении д) букву x словом «Волга», получаем истинное высказывание «Река Волга впадает в Каспийское море». А заменяя в том же предложении букву x словом «Дунай», получаем ложное высказывание «Река Дунай впадает в Каспийское море». Иногда множество X содержит элементы, при подстановке которых получается бессмысленное предложение. Например, Петрозаводск — не река, а город, а потому, если бы множество X в примере д) состояло не только из рек, но и из городов, то мы получили бы бессмысленное утверждение «Река Петрозаводск впадает в Каспийское море». В дальнейшем, чтобы не усложнять дела, условимся считать бессмысленные предложения ложными высказываниями. Часто вместо слов «высказывание $P(a)$ истинно (соответственно, ложно)» говорят «Высказывательная форма $P(x)$ истинна (соответственно, ложна) при $x = a$».

Совокупность T значений переменной x, при которых высказывательная форма $P(x)$ истинна, называется множеством истинности этой формы. Например, для высказывательной формы «Поэма x написана Лермонтовым» к множеству T принадлежат: «Демон», «Мцыри», но не принадлежит «Хорошо».

Уравнения, а также неравенства, содержащие переменную, являются высказывательными формами. Например, $2x - 4 = 3(x + 5)$ — высказывательная форма, заданная на множестве R действительных чисел. При $x = 1$ эта форма ложна, так как, подставив в уравнение вместо x значение 1, получим ложное равенство $2 \cdot 1 - 4 = 3(1 + 6)$, т. е. $-2 = 21$. А при $x = -19$ она истинна, так как равенство $2(-19) - 4 = 3 \cdot (-19 + 5)$ истинно. Множество истинности высказывательной формы $x^2 - 4 = 0$

состоит из чисел -2 и 2, $T = \{-2, 2\}$. В школе обычно говорят о множестве корней уравнения, но это то же самое, лишь по-другому сказанное. Неравенство $2x - 4 > 18$ является высказывательной формой. Легко проверить, что множеством истинности этой формы является числовой луч $\{x | x > 11\}$.

Упражнения

60. Из следующих предложений выберите высказывательные формы и укажите их область определения и множество истинности, а также выберите высказывания и найдите их значения истинности:

а) $x^2 - 2x - 15 = 0$;
б) для $x = 5$ выполняется равенство $x^2 - 2x - 15 = 0$;
в) для всех чисел x выполняется равенство $x^2 - 2x - 15 = 0$;
г) существует такое отрицательное число x, что $x^2 - 2x - 15 = 0$;
д) если число x делится на 3, то оно делится и на 9;
е) все числа, делящиеся на 9, делятся на 3;
ж) существуют числа, делящиеся на 9, но не делящиеся на 3;
з) неверно, что число 17 делится на 5;
и) в прямоугольнике x диагонали конгруэнтны;
к) в любом прямоугольнике диагонали конгруэнтны.

61. Даны высказывательные формы $A(x)$: «$9x^2 - 4 = 0$» и $B(x)$: «$3x - 2 < -11$». Найдите их множества истинности, если их область определения есть: а) R; б) R_+; в) N.

62. Найдите множество истинности высказывательной формы «число x четно», заданной на множестве $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

63. Найдите множество истинности следующих высказывательных форм:

а) $\sqrt{x + 2} = 1$;
б) $\sqrt{x + 2} > 1$;
в) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \geqslant 0$;
г) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;
д) $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;
е) $\sqrt{x^2} = x$;
ж) $\sqrt{x^2} = |x|$;
з) $\sqrt{x^2} = -x$;
и) $\sqrt{x^2} = -|x|$;
к) $\sqrt{x^2} = -1$.

2. Операции над высказывательными формами. Пусть высказывательные формы $P(x)$, $Q(x)$, ... заданы на одном и том же множестве X. С помощью логических операций (отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и т. д.) из этих форм можно составить различные выражения, например:

$$P(x) \wedge Q(x),\ P(x) \to (Q(x) \vee R(x))$$

и т. д. Заменяя в каждом из таких выражений переменную x каким-то ее значением a, получаем сложное высказывание, составленное из высказываний $P(a)$, $Q(a)$ и т. д. Поэтому такие выражения сами являются высказывательными формами. Они истинны для тех $a \in X$, при которых истинно соответствующее высказывание.

Например, высказывательная форма $(3 < x) \wedge (x < 6)$ истинна при $x = 4$, так как высказывания $3 < 4$ и $4 < 6$ истинны, а потому истинна и их конъюнкция. Для краткости записи мы в дальнейшем фиксируем множество X и будем писать $P(x)$ вместо $P(x)$, $x \in X$ и т. д.

Приведем несколько примеров операций над высказывательными формами.

1. Пусть $P(x)$ означает «Город x находится в Московской области». Тогда $\overline{P}(x)$ читается так: «Город x не находится в Московской области». Поэтому Киев принадлежит множеству истинности для $\overline{P}(x)$, но не принадлежит множеству истинности для $P(x)$.

2. Если $P(x)$ означает «Число x делится без остатка на 3», то $\overline{P}(x)$ означает «Число x не делится без остатка на 3».

3. Если $P(x)$ означает «Человек x живет в Москве», а $Q(x)$ — «Человек x кареглаз», то $P(x) \wedge Q(x)$ означает, что «Человек x живет в Москве и кареглаз». Ни сероглазые москвички, ни кареглазые ленинградцы (не говоря уже о синеглазых киевлянках) не принадлежат множеству истинности этой высказывательной формы.

4. Если $P(x)$ означает «Число x делится без остатка на 3», а $Q(x)$ — «Число x делится без остатка на 2», то $P(x) \vee Q(x)$ значит «Число x делится без остатка на 2 или на 3». Поэтому такие числа, как 4, 6, 9, принадлежат истинности для $P(x) \vee Q(x)$, а число 5 не принадлежит этому множеству.

5. Пусть $P(x)$ означает «Число x делится на 3», а $Q(x)$ — «Число x делится на 5». Тогда $P(x) \to Q(x)$ значит «Если число x делится на 3, то оно делится на 5». Числа 4 и 10 принадлежат множеству истинности этой высказывательной формы, так как для них ложно $P(x)$: ни 4, ни 10 не делятся на 3. И при этом несущественно, что 4 не делится на 5, а 10 делится на 5. Принадлежит множеству истинности для $P(x) \to Q(x)$ и число 15 — истинны и $P(15)$ и $Q(15)$. А число 6 не принадлежит множеству истинности для $P(x) \to Q(x)$, так как $P(6)$ истинно, а $Q(6)$ ложно. Так как множество истинности нашей импликации не совпадает с множеством всех натуральных чисел, то утверждение «Любое натуральное число, делящееся на 3, делится и на 5» ложно.

Упражнения

64. Даны высказывательные формы $P(x)$: «Человек x живет в Москве» и $Q(x)$: «Человек x преподает в школе». Прочтите словами следующие высказывательные формы и укажите для каждой из них множество истинности:

а) $P(x) \wedge Q(x)$; б) $P(x) \vee Q(x)$; в) $\overline{P}(x) \wedge Q(x)$; г) $P(x) \wedge \overline{Q}(x)$; д) $\overline{P}(x) \vee Q(x)$, е) $\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(x)$; ж) $P(x) \to Q(x)$; з) $Q(x) \to P(x)$.

65. Даны высказывательные формы $P(x)$: «Прямая x касается заданной окружности» и $Q(x)$: «Прямая x отстоит от центра

заданной окружности на расстояние, равное ее радиусу». Прочтите эквиваленцию $P(x) \leftrightarrow Q(x)$. Истинна ли она для всех x?

66. Даны высказывательные формы $P(x)$: «Число x делится на 3» и $Q(x)$: «Сумма цифр числа x делится на 9». Установите, какие из следующих импликаций истинны для всех натуральных чисел:

а) $P(x) \to Q(x)$; б) $Q(x) \to P(x)$; в) $\overline{P}(x) \to Q(x)$; г) $Q(x) \to \overline{P}(x)$.

67. Найдите множества истинности для следующих высказывательных форм:

а) $(x^2 - 4 = 0) \vee (x^2 - 9) = 0$; б) $(x^2 - 6x + 8 = 0) \wedge (x^2 - 16 = 0)$; в) $(x^2 - 6x + 8 = 0) \leftrightarrow (x^2 - 16 = 0)$, г) $(x^2 - 4 = 0) \leftrightarrow (x^2 = 4)$; д) $(x^2 - 4 = 0) \leftrightarrow (x = 2)$; е) $(x^2 - 6x + 8 = 0) \wedge (x^2 - 9 \geqslant 0)$; ж) $\sqrt{x^2} \leqslant x$; з) $|9 - x| + |x + 1| = 10$; и) $|x| = |x + 1|$; к) $|x - 5| > |x + 1|$.

3. Связь операций над высказывательными формами с их множествами истинности. Если известны множества истинности для высказывательных форм $P(x)$ и $Q(x)$, заданных на X, то легко найти множества истинности для форм $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \vee Q(x)$, $P(x) \to Q(x)$, $P(x) \leftrightarrow Q(x)$, а также для $\overline{P}(x)$ и для $\overline{Q}(x)$. Форма $\overline{P}(x)$ истинна для тех и только тех значений x, для которых $P(x)$ ложна. Поэтому множество истинности для $\overline{P}(x)$ — дополнение в X к множеству истинности для $P(x)$. Это можно записать такой формулой:

$$T_{\overline{P}} = (T_P)'. \tag{1}$$

Форма $P(x) \wedge Q(x)$ истинна для тех x, для которых истинны и $P(x)$ и $Q(x)$. Это значит, что множество истинности для $P(x) \wedge Q(x)$ — пересечение множеств истинности для $P(x)$ и для $Q(x)$:

$$T_{P \wedge Q} = T_P \cap T_Q \tag{2}$$

(таким образом, не случайно обозначения для операций конъюнкции высказываний и пересечения множеств походят друг на друга). Точно так же убеждаемся, что

$$T_{P \vee Q} = T_P \cup T_Q. \tag{3}$$

Если высказывательные формы $P(x)$ и $Q(x)$ имеют одинаковые множества истинности, т. е. если $T_P = T_Q$, то их называют эквивалентными или равносильными и пишут: $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$. В этом случае эквиваленция $P(a) \leftrightarrow Q(a)$ истинна для всех $a \in X$. В самом деле, если $a \in T_P = T_Q$, то $P(a)$ и $Q(a)$ истинны, а тогда истинно и $P(a) \Leftrightarrow Q(a)$; если же $a \notin T_P = T_Q$, то $P(a)$ и $Q(a)$ ложны, а тогда $P(a) \leftrightarrow Q(a)$ все равно истинно. Справедливо и обратное утверждение: если эквиваленция $P(x) \leftrightarrow Q(x)$ истинна для всех $x \in X$, то высказывательные формы $P(x)$ и $Q(x)$ эквивалентны.

Высказывательные формы $P(x)$: «Натуральное число x делится на 4» и $Q(x)$: «Натуральное число x делится на 2» таковы, что для

всех натуральных чисел a истинна импликация $P(a) \to Q(a)$: если a делится на 4, то оно делится и на 2, а если a не делится на 4, то импликация истинна тривиальным образом в силу ложности условия. Говорят, что $Q(x)$ — следствие для $P(x)$.

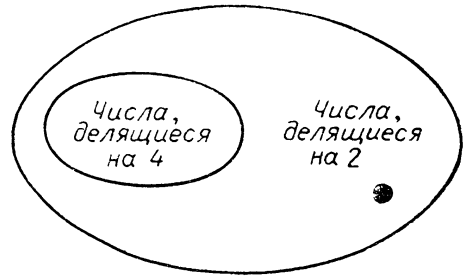


Рис. 8

Множество чисел, делящихся на 4, — подмножество в множестве чисел, делящихся на 2. Иными словами, в нашем примере $T_P \subset T_Q$. Это не случайно—всегда, когда импликация $P(a) \to Q(a)$ истинна для всех a из X, т. е. когда $Q(x)$ следует из $P(x)$, имеет место соотношение $T_P \subset T_Q$. Это легко проверить, нарисовав диаграмму Эйлера—Венна (рис. 8). Верно и обратное утверждение: если $T_P \subset T_Q$, то $P(x) \to Q(x)$. Итак, $Q(x)$ следует из $P(x)$ в том и только в том случае, когда $T_P \subset T_Q$. В этом случае говорят, что $P(x)$ — достаточное условие для $Q(x)$, а $Q(x)$ — необходимое условие для $P(x)$ или что $Q(x)$ — следствие $P(x)$, и пишут $P(x) \Longrightarrow Q(x)$.

Например, множество натуральных чисел, делящихся на 9, является подмножеством в множестве натуральных чисел, делящихся на 3. Иными словами, если $P(x)$ означает «Натуральное число x делится на 9», а $Q(x)$ — что «Натуральное число x делится на 3», то $T_P \subset T_Q$, и потому $P(x) \Longrightarrow Q(x)$ истинно для всех $x \in N$. Значит, делимость натурального числа x на 9 достаточна для того, чтобы оно делилось на 3, а делимость на 3 необходима для того, чтобы оно делилось на 9.

Если и $P(x) \Longrightarrow Q(x)$ и $Q(x) \Longrightarrow P(x)$, то $T_P \subset T_Q$ и $T_Q \subset T_P$. В этом случае $T_P = T_Q$, т. е. $P(x)$ и $Q(x)$ имеют одно и то же множество истинности. Поэтому $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$. Эту же мысль выражают иначе, говоря, что $P(x)$ — необходимое и достаточное условие для $Q(x)$, а $Q(x)$ — необходимое и достаточное условие для $P(x)$. Например, для того чтобы натуральное число x делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 9. Это значит, что множество натуральных чисел, делящихся на 9, совпадает с множеством натуральных чисел, для которых сумма цифр десятичной записи делится на 9.

Упражнения

68. Пусть X — множество живых существ. Постройте диаграммы Эйлера — Венна, изображающие связи между следующими высказывательными формами:

а) $P(x)$: «x теплокровное», $Q(x)$: «x имеет позвоночник»;

б) $P(x)$: «x — рыба», $Q(x)$: «x имеет четырехкамерное сердце»;

в) $P(x)$: «x — крылатое», $Q(x)$: «x — млекопитающее».

г) $P(x)$: «x — человек», $Q(x)$: «x — двуногое существо без перьев»;

д) $P(x)$: «x имеет жабры», $Q(x)$: «x летает на высоте 100 м».

69. Пусть Y — множество многочленов. Постройте диаграммы Эйлера — Венна, изображающие связи между следующими высказывательными формами:

а) $P(y)$: «Степень многочлена y равна 5», $Q(y)$: «Многочлен y имеет восемь различных корней»;

б) $P(y)$: «Сумма коэффициентов многочлена y равна нулю», $Q(y)$: «Число 1 является корнем многочлена y»;

в) $P(y)$: «Старший коэффициент многочлена y равен 1, а все остальные коэффициенты целые», $Q(y)$: «Число $\frac{3}{4}$ является корнем многочлена y».

70. Пусть X — множество треугольников. Постройте диаграммы Эйлера — Венна, изображающие связи между следующими высказывательными формами:

а) $P(x)$: «Треугольник x равнобедренный», $Q(x)$: «Треугольник x равносторонний»;

б) $P(x)$: «Треугольник x равнобедренный», $Q(x)$: «Углы при основании треугольника x конгруэнтны»;

в) $P(x)$: «Треугольник x прямоугольный», $Q(x)$: «В треугольник x можно вписать окружность».

Установите, какие из следующих импликаций истинны для всех $x \in X$ в случае а), в случае б), в случае в).

$$P(x) \to Q(x),\ \overline{P}(x) \to Q(x),\ P(x) \to \overline{Q}(x),$$
$$\overline{P}(x) \to \overline{Q}(x),\ Q(x) \to P(x),\ \overline{Q}(x) \to P(x),$$
$$Q(x) \to \overline{P}(x),\ \overline{Q}(x) \to \overline{P}(x).$$

71. Пусть $P(x)$: «Натуральное число x делится на 5», $Q(x)$: «Последняя цифра десятичной записи числа x равна нулю». Какие из следующих импликаций истинны для всех x из N? Сформулируйте их с помощью слов «необходимо» и «достаточно». Для импликаций, истинных не для всех натуральных чисел, найдите множества истинности.

а) $P(x) \to Q(x)$; б) $\overline{P}(x) \to Q(x)$;

в) $P(x) \to \overline{Q}(x)$; г) $\overline{P}(x) \to \overline{Q}(x)$;

д) $Q(x) \to P(x)$; е) $\overline{Q}(x) \to P(x)$;

ж) $Q(x) \to \overline{P}(x)$; з) $\overline{Q}(x) \to \overline{P}(x)$.

72. В приведенных ниже предложениях подставьте вместо многоточия слова «необходимо, но не достаточно», «достаточно, но не необходимо», «необходимо и достаточно», чтобы получились импликации, истинные для всех значений x.

а) Для того чтобы число x делилось на 5, ..., чтобы его десятичная запись кончалась цифрой 0.

б) Для того чтобы число x делилось на 9, ..., чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 3.

в) Для того чтобы треугольник x был равнобедренным, ..., чтобы углы при основании были конгруэнтны.

г) Для того чтобы параллелограмм x был ромбом, ..., чтобы диагонали делили пополам внутренние углы.

д) Для того чтобы параллелограмм x был квадратом, ..., чтобы его стороны были конгруэнтны.

73. Следует ли уравнение $(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$ из уравнения $x^2 = 1$, если переменная x принимает значения из множества а) целых чисел, б) натуральных чисел?

74. Задайте множество значений переменной так, чтобы на этом множестве вторая высказывательная форма следовала из первой.

а) x делится на 3; x четно.

б) $x^2 + 2x - 15 = 0$; $x > 0$.

в) y — трехсложное слово; в слове y буква «а» встречается не более двух раз.

75. Определите, равносильны ли следующие высказывательные формы, если переменные принимают значения из множества 1) натуральных чисел, 2) целых чисел, 3) рациональных чисел, 4) действительных чисел.

а) $|x| \leqslant 0$, $x^2 + y^2 = 0$;

б) $\frac{x^2 - 2}{x + \sqrt{2}} = x - \sqrt{2}$, $\sqrt{x^2} = |x|$;

в) $(x - \sqrt{2})\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1) = 0$, $x^2 = 1$;

г) $\sqrt{xy} = 6$, $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 6$;

д) $x = y$, $\sqrt{x} = \sqrt{y}$;

е) $x = y$, $|x| = |y|$.

76. Задайте множество значений переменной так, чтобы данные высказывательной формы были на этом множестве эквивалентны:

а) x четно, x кратно 3;

б) y — четное число, y — простое число;

в) $x^2 = 1$, $x = 1$;

г) z — ромб, диагонали z взаимно перпендикулярны.

77. Выясните, следует ли хотя бы одна из данных высказывательных форм из другой ($x \in R$):

а) $|x| < 3$, $x^2 - 3x + 2 = 0$;

б) $x^4 = 16$, $x^2 = 4$;

в) $x^2 + x - 6 = 0$, $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$;

г) $x - 1 > 0$, $(x - 2)(x - 5) = 0$;

д) $x^2 + 5x = 9$, $\sqrt{x^2} = -1$;

е) $x^2 + 5x = 0$, $x + 1 = 1 + x$.

78. Найдите множество значений a, при которых из первого предложения следует второе:

а) $x > a$, $x > 1$;

б) $|x| < a$, $x^2 < 9$;

в) $x^2 + x - 6 = 0$, $|x| < a$;
г) $|x| < a$, $x^2 + 5x + 7 = 0$;
д) $x = a$, $x^2 \geqslant 0$;
е) $|x| < a$, $x^2 \geqslant 0$;
ж) $x^2 + 5x - 6 < 0$; $x - a > 1$.

79. Выясните, являются ли следующие высказывательные формы эквивалентными, если $x \in R$:

а) $x + 1 = 0$, $x = \sqrt{0{,}875}$;
б) $|x| \geqslant 0$, $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$;
в) $|x| > 3$, $x^2 - 9 > 0$;
г) $|x| < 0$, $x^2 + 4 < 3$;
д) $x = 1$, $x + \frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x^2 - 4} = 1$;
е) $x > 0$, $x^2 > 0$;
ж) $x = x$, $\frac{x^3}{x} = x$;
з) $x\left(\frac{1}{x^4 + 4} - 1\right) = 0$, $x = 0$ или $\frac{1}{x^4 + 4} = 1$;
и) $\overline{x > 2}$, $x < 2$;
к) $\overline{x > 2}$, $x \leqslant 2$.

80. Найдите множество значений a, при которых данные высказывательные формы эквивалентны:

а) $x^2 + ax - 1 = 0$, $x = 1$;
б) $|x| < a$, $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$;
в) $|x| < a$, $\sqrt{x^2} = -3$;
г) $x^2 + a^2 = 0$; $\sqrt{x^2} = -|x|$.

81. Вставьте «и» либо «или» так, чтобы выполнялись эквивалентности:

а) $|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ... $x = -1$;
б) $|x| < 1 \Leftrightarrow x > -1$ ... $x < 1$;
в) $|x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ... $x > 1$;
г) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ... $b = 0$;
д) $ab \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ ... $b \neq 0$;
е) $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ... $b \neq 0$;
ж) $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$ ... $b = 0$;
з) $\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow (a > 0$ ... $b > 0)$ ... $(a < 0$ ... $b < 0)$.

82. Докажите эквивалентности:

а) $P(x) \wedge Q(x) \Leftrightarrow Q(x) \wedge P(x)$;
б) $P(x) \vee Q(x) \Leftrightarrow Q(x) \vee P(x)$;
в) $\overline{P(x) \wedge Q(x)} \Leftrightarrow \overline{P}(x) \vee \overline{Q}(x)$;
г) $\overline{P(x) \vee Q(x)} \Leftrightarrow \overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(x)$;

д) $P(x) \to Q(x) \Leftrightarrow \overline{P}(x) \vee Q(x)$;
е) $\overline{P(x) \to Q(x)} \Leftrightarrow P(x) \wedge \overline{Q}(x)$;
ж) $P(x) \leftrightarrow Q(x) \Leftrightarrow (P(x) \wedge Q(x)) \vee (\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(x))$.

83. Изобразите множества истинности для $P(x)$ и $Q(x)$, а потом изобразите множества истинности следующих высказывательных форм:

а) $P(x) \wedge \overline{Q}(x)$; б) $\overline{P}(x) \vee \overline{Q}(x)$; в) $\overline{P}(x) \to Q(x)$; г) $P(x) \leftrightarrow \overline{Q}(x)$; д) $(P(x) \to Q(x)) \wedge (\overline{P}(x) \to \overline{Q}(x))$.

4. Кванторы. Чтобы получить из высказывательной формы $P(x)$, $x \in X$ высказывание, можно заменить x одним из значений $a \in X$. Но существует иной способ получения высказываний из высказывательных форм — *навешивание кванторов.* Для этого перед высказывательной формой пишут кванторы — слова, описывающие ее множество истинности; например, «Для всех x из X истинно, что...» или «Существует такое x из X, что ...». Так из высказывательной формы «Человек x синеглаз» получаются высказывания «Все люди синеглазы» (ложное высказывание) или «Существуют синеглазые люди» (истинное высказывание). Поскольку в математической логике стараются заменять слова знаками, то вместо слов «Для всех x из X истинно ...» условились писать $\forall x \in X$, а вместо «Существует такое x из X, что ...» пишут $\exists x \in X$. Здесь $\forall$ — перевернутая буква A, первая буква английского слова all — все, а $\exists$ — перевернутая буква E, первая буква английского слова exist — существует. Эти символы являются обозначениями соответственно для квантора всеобщности и квантора существования. Таким образом, квантор всеобщности означает, что множество истинности T высказывательной формы совпадает со всем множеством X, а квантор существования означает, что T непусто.

Возможны и другие прочтения записей $(\forall x \in X)P(x)$ и $(\exists x \in X)P(x)$, соответственно равнозначные между собой; приведем наиболее употребительные из них (слова в квадратных скобках иногда опускаются):

1. $(\forall x \in X)\, P(x)$ читается так:

а) для любого (всякого, каждого) [значения] x из X $P(x)$ [истинно];

б) всякий (любой, каждый) элемент x множества X (X — множество значений переменной x) обладает свойством P;

в) каково бы ни было x, $\overline{P}(x)$ истинно.

2. $(\exists x \in X)\, P(x)$ читается так:

а) существует [значение] x из X такое, что $P(x)$ [истинно];

б) для некоторых [значений] x из X $P(x)$ [истинно];

в) по меньшей мере (хотя бы) одно [значение] x из X таково, что $P(x)$ [истинно];

г) существует элемент x множества X, обладающий свойством P; по крайней мере (хотя бы) один элемент x множества X обладает

свойством P; некоторые элементы множества X обладают свойством P;

д) найдется такое x из X, что $P(x)$ истинно.

Иногда для краткости мы будем опускать указание множества значений x и писать $\forall x P(x)$ или $\exists x P(x)$.

Приведем примеры записи высказываний с помощью кванторов и высказывательных форм. Пусть $P(x)$ означает «Число x четное». Тогда запись $(\forall x \in N)\ P(x)$ читается: «Все натуральные числа четны» (ложное высказывание), а запись $(\exists x \in N)\ P(x)$ — «Существуют четные натуральные числа». Кратко пишут: $\forall x\ P(x)$, $\exists x P(x)$; $x \in N$.

Упражнения

84. Сформулируйте следующие высказывания, пользуясь обычным языком; установите их истинность или ложность:

а) $(\forall x \in R)\ (x - 1 = x)$; б) $(\exists x \in R)\ (x - 1 = x)$;
в) $(\forall x \in R)\ (x - 1 \neq x)$; г) $(\exists x \in R)\ (x - 1 \neq x)$.

85. На множестве N всех натуральных чисел заданы высказывательные формы $P(x)$: «Число x четное» и $Q(x)$: «Число x кратно 4». Сформулируйте следующие высказывания, пользуясь обычным языком, и укажите среди них истинные:

а) $(\forall x \in N)\ P(x)$; б) $(\exists x \in N)\ \overline{P}(x)$; в) $(\exists x \in N)\ Q(x)$;
г) $(\forall x \in N)\ \overline{Q}(x)$.

86. Введите обозначения для высказывательных форм и запишите в символической форме следующие высказывания:

а) существует такое действительное число x, что $x^2 = 4$;

б) любое натуральное число четно;

в) существует такое действительное число x, что $5x = x - 1$;

г) не существует рационального числа x такого, что $x^2 = 2$.

87. Прочтите следующие записи, заменив обозначения кванторов общности и существования их словесными выражениями, и определите значения истинности данных высказываний:

а) $\forall x\ ((x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1)$;
б) $\exists x\ (x + 1 = 2)$;
в) $\exists x\ (|x| < 0)$;
г) $\forall x\ (|x| > 0)$;
д) $\forall x \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1\right)$;
е) $\exists y\ (y^2 + y - 5 < 0)$.

88. Запишите следующие высказывания, воспользовавшись символами кванторов:

а) всякое число равно самому себе;

б) любое число не больше самого себя;

в) каково бы ни было число y, квадрат его неотрицателен;

г) всякое число либо положительно, либо отрицательно, либо равно 0;

д) существует число x такое, что $x - 2 = 5$;

е) по крайней мере, одно число x является корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$;

ж) уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень;

з) множество X непусто;

и) некоторые элементы множества X обладают свойством P.

89. Пусть $R(x)$ означает «x — действительное число», а $Q(x)$ — «x — рациональное число».

Для каждого высказывания из пункта I найдите соответствующую формулировку из пункта II. Определите значения истинности данных высказываний.

I. а) $\forall x\,(Q(x) \to R(x))$.

б) $\forall x\,(\overline{Q}(x) \to R(x))$.

в) $\exists x\,(Q(x) \wedge R(x))$.

г) $\exists x\,(\overline{Q}(x) \wedge R(x))$.

II. а) Некоторые рациональные числа суть действительные.

б) Всякое рациональное число — действительное.

в) Некоторые рациональные числа не являются действительными.

г) Всякое рациональное число не является действительным.

90. Пусть P означает свойство «Быть простым числом», N — «Быть натуральным числом», K — «Быть четным числом». Запишите символически следующие высказывания:

а) существует простое четное число;

б) всякое простое число, большее 2, нечетно;

в) всякое простое число — натуральное;

г) существуют нечетные простые числа;

д) некоторые простые числа четны.

91. Свяжите переменную квантором так, чтобы получить истинное высказывание (переменные x, y, z в а)—г) принадлежат R):

а) $|x| = -x$;

б) $x^2 \geqslant 0$;

в) $y^2 + 2 \leqslant 0$;

г) $\sin z \neq 2$;

д) число букв в слове x равно 4;

е) все дороги из пункта x ведут на юг;

ж) в треугольнике y сумма внутренних углов равна $2d$.

92. Сформулируйте следующие высказывания с помощью квантора существования, воспользовавшись обозначениями: $P(u)$ — «Уравнение u имеет действительный корень», $A(x)$ — «x любит кашу», $Q(y)$ —«Простое число y нечетно», $B(m)$—«Многоугольник m правильный».

а) Не всякое уравнение имеет действительный корень.

б) Не для любого u выполняется $P(u)$.

в) Не все любят кашу.

г) Не каждое простое число нечетно.

д) Не всякий многоугольник правильный.

93. Сформулируйте приведенные ниже высказывания с помощью квантора общности, введя обозначения: $P(x)$ — «Квадрат рационального числа x равен 2»; $Q(y)$ — «Человек y имеет мать»; $Q_1(y)$ — «Человек y бессмертен».

а) Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.

б) Нет человека, не имеющего матери.

в) Ни одно из действительных чисел не удовлетворяет неравенству $x^2 + 1 < 0$.

г) Ни один человек не бессмертен.

94. На примере высказывательных форм $P(x)$: «Заяц x труслив» и $Q(x)$: «Заяц x быстроног» проверьте эквивалентности:

а) $(\forall x \in X)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in X) P(x) \wedge (\forall x \in X) Q(x)$;

б) $(\exists x \in X)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in X) P(x) \vee (\exists x \in X) Q(x)$.

95. На примере высказывательных форм $P(x)$: «Рост человека x больше 180 см» и $Q(x)$: «Рост человека x меньше 180 см» докажите, что, вообще говоря, не верны эквивалентности:

а) $(\exists x \in X)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in X) P(x) \wedge (\exists x \in X) Q(x)$;

б) $(\exists x \in X)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in X) P(x) \vee (\forall x \in X) Q(x)$.

96. Докажите, что

а) $(\forall x \in X) P(x) \Rightarrow (\exists x \in X) P(x)$;

б) $(\exists x \in X) \overline{P(x)} \Leftrightarrow \overline{(\forall x \in X) P(x)}$, ($X$ непусто).

5*. Многоместные высказывательные формы. До сих пор мы рассматривали высказывательные формы, в которые входит лишь одна переменная. Обычно такие формы связаны со свойствами элементов множества X. Если же речь идет о соответствиях между элементами различных множеств или одного и того же множества, то приходится использовать высказывательные формы, содержащие несколько переменных. Примерами таких форм могут служить: «Человек x живет в городе y», «Человек x — отец человека y», «Сумма чисел x и y больше числа z» и т. д. Если высказывательная форма содержит *две* переменные, то ее называют *двухместной*, если *три* — *трехместной* и т. д. Двухместную форму записывают в виде $P(x, y)$; $x \in X$, $y \in Y$, указывая множества значений для каждой переменной.

Множеством истинности двухместной высказывательной формы $P(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ называется совокупность пар (a, b), где $a \in X$, $b \in Y$, для которых $P(a, b)$ — истинное высказывание. Например, если $P(x, y)$ означает «Река x впадает в море y», то к множеству истинности этой формы принадлежат пары (Волга, Каспийское море), (Дунай, Черное море), но не принадлежит пара

(Енисей, Азовское море). Множество всех пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$, называется декартовым[1] произведением множеств X и Y и обозначается $X \times Y$. Таким образом, множество истинности двухместной высказывательной формы является подмножеством декартова произведения $X \times Y$.

Из каждой многоместной высказывательной формы можно получить высказывание, «навесив» на каждую переменную свой квантор. Эти кванторы могут быть как одноименными (например, кванторами всеобщности), так и разноименными. Поэтому из двухместной высказывательной формы $P(x, y)$ получается восемь высказываний (запишите их!).

Например, если $P(x, y)$ означает «Река x впадает в море y», то эти высказывания читаются так:

1) все реки впадают в любое море;
2) в любое море впадают все реки;
3) для любой реки есть море, в которое она впадает;
4) для любого моря есть впадающая в него река;
5) существует река, впадающая в любое море;
6) существует море, в которое впадает любая река;
7) существует река, впадающая в некоторое море;
8) существует море, в которое впадает некоторая река.

Легко видеть, что высказывания 1) и 2) равносильны, так же как и высказывания 7) и 8): если все реки впадают в любое море, то в любое море впадают все реки, и обратно; а если существует река, впадающая в некоторое море, то существует море, в которое впадает некоторая река, и обратно. Вообще, высказывания $\forall x \forall y P(x, y)$ и $\forall y \forall x P(x, y)$ равносильны: они утверждают, что множеством истинности для $P(x, y)$ является все декартово произведение $X \times Y$. Точно так же и $\exists x \exists y P(x, y)$ и $\exists y \exists x P(x, y)$ означает, что множество истинности для $P(x, y)$ непусто.

Высказывания $\forall y \exists x P(x, y)$ и $\exists x \forall y P(x, y)$ различны. В нашем примере первое из них означает, что для каждого моря есть впадающая в него река (это, по-видимому, истинно), а второе — что есть река, впадающая в каждое море (это наверняка ложь). Таким образом, **одноименные кванторы можно переставлять, а разноименные переставлять нельзя.** Поэтому на самом деле получается не восемь, а лишь шесть различных высказываний. Легко доказать, что следующая импликация всегда истина: $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$ (если бы была река, впадающая во все моря, то уж наверняка в любое море впадала бы хоть одна река).

Если навесить на двухместную высказывательную форму лишь о д и н квантор, то получится не высказывание, а *высказывательная форма* относительно той переменной, которая осталась *свободной*. Например, из той же высказывательной формы $P(x, y)$ — «Река x впадает в море y» получаем четыре одноместные высказыва-

[1] По имени выдающегося французского математика и философа Р. Декарта (1596—1650) — творца метода координат.

тельные формы:

1) $\forall x\, P\,(x, y)$ (все реки впадают в море y);
2) $\forall y\, P\,(x, y)$ (река x впадает во все моря);
3) $\exists x\, P\,(x, y)$ (существует река, впадающая в море y);
4) $\exists y\, P\,(x, y)$ (существует море, в которое впадает река x).

Упражнения

97. Пусть X — множество прямых на плоскости. Прочтите следующие высказывания и укажите среди них истинные:

а) $\forall x \exists y\ (x \parallel y)$;
б) $\exists x \exists y\ (x \perp y)$;
в) $\exists y\ \forall x\ (x \parallel y)$;
г) $\forall x \forall y \forall z\ ((x \parallel y \wedge y \parallel z) \rightarrow x \parallel z)$;
д) $\forall x \forall y \forall z\ ((x \perp y \wedge y \perp z) \rightarrow x \parallel z)$;
е) $\forall x \forall y \forall z\ ((x \parallel z \wedge y \parallel z) \rightarrow x \parallel y)$;
ж) $\forall x \forall y \forall z\ ((x \perp y \wedge y \perp z) \rightarrow x \perp z)$.

98. Пусть на множестве N натуральных чисел заданы высказывательные формы $P\,(x)$: «Число x простое» и $x \vdots y$ ($x \vdots y$ означает, что число x делится без остатка на y). Прочтите следующие высказывания и укажите среди них истинные:

а) $\exists y \forall x\ (x \vdots y)$; б) $\forall x \exists y\ (x \vdots y)$;
в) $\forall x \forall y \forall z\ ((x \vdots y \wedge y \vdots z) \rightarrow x \vdots z)$;
г) $\forall x \exists y\ ((P\,(y) \vee y = 1) \wedge x \vdots y)$;
д) $\forall x \forall y \forall z\ ((xy \vdots z \wedge P\,(z)) \rightarrow (x \vdots z \vee y \vdots z))$;
е) $\forall x \forall y\ ((x \vdots y \wedge P\,(x)) \rightarrow (y = x \vee y = 1))$.

99. Запишите в символической форме следующие высказывания:

а) если x и y — натуральные числа, произведение которых делится на простое число p, то хотя бы один из множителей делится на p;

б) для каждой прямой x на плоскости и каждой точки этой плоскости найдется прямая, проходящая через эту точку и параллельная прямой x.

100. Прочтите следующие высказывания и определите их значения истинности (a, b, x — действительные числа):

а) $\forall x \exists a\ (3x + 1 = ax)$,
б) $\exists x \forall a\ (3x + 1 = ax)$,
в) $\exists b \forall a \exists x\ (x^2 + ax + b = 0)$,
г) $\exists a \forall b \exists x (x^2 + ax + b = 0)$.

101. Приведите пример высказывательной формы $P\,(x, a)$, такой, что $\exists x \forall a\ P\,(x, a)$ — истинное высказывание.

102. Запишите символически следующие высказывания:

а) функция 2^x положительна при любом значении аргумента;
б) функция 2^x принимает любое положительное значение.

103. Эквивалентны ли высказывания «Каждую задачу решил,

по крайней мере, один ученик» и «По крайней мере, один ученик решил все задачи». Следует ли хотя бы одно из них из другого? Почему?

У к а з а н и е. Запишите данные высказывания символически, обозначив через $P(x, y)$ высказывательную форму «Ученик x решил задачу y».

104. Докажите, что

а) $(\forall x \in M)\ P(x) \Leftrightarrow \forall x\ (x \in M \to P(x))$,
б) $(\exists x \in M)\ P(x) \Leftrightarrow \exists x\ (x \in M \wedge P(x))$.

105. Запишите символически утверждения:

а) в каждом классе найдется ученик, который решил хотя бы одну задачу из контрольной;

б) найдется класс, в котором каждый ученик решил хотя бы одну задачу из контрольной;

в) в каждом классе хоть один ученик решил все задачи из контрольной;

г) в каждом классе любой ученик решил хотя бы одну задачу из контрольной;

д) существует такая задача, что в каждом классе хотя бы один ученик ее решил;

е) существует класс, в котором все ученики решили все задачи из контрольной;

ж) для каждой задачи есть класс, в котором все ученики ее решили.

Придумайте еще аналогичные высказывания. Какие из этих высказываний являются следствием других?

106. Запишите символически следующие высказывания, включив в кванторы указание множества значений переменных:

а) в множестве натуральных чисел есть наименьшее;

б) в множестве натуральных чисел нет наибольшего;

в) любые два рациональных числа либо равны друг другу, либо одно из них больше другого.

107. Изобразите на координатной плоскости множества истинности следующих высказываний:

а) $x^2 = y^2$;
б) $x + 2y = 4$;
в) $x^2 + y^2 = 9$;
г) $x^2 + y^2 \leqslant 9$;
д) $x^2 + y^2 > 9$;
е) $x^2 + y^2 = 0$;
ж) $x^2 + y^2 = -4$;
з) $xy = 0$;
и) $x > 0 \wedge y > 0$;
к) $x > 0 \vee y > 0$;
л) $(x > 0) \wedge (y > 0) \wedge (x^2 + y^2 \leqslant 9)$;
м) $x > 0 \to y > 0$;
н) $x^2 = y^2 \leftrightarrow x = y$;
о) $xy < 1 \to xy = 1$;
п) $|xy| \leqslant 0 \to (x^2 + y^2 = 0)$.

108. Какие из следующих высказываний истинны:

а) $(\forall x \in R)\ (\forall y \in R)\ (x^2 = y^2 \to x = y)$;
б) $(\forall x \in R)\ (\forall y \in R)\ (x = y \to x^2 = y^2)$;

в) $(\forall x \in R_+)\,(\forall y \in R_+)\,(x^2 = y^2 \to x = y)$;
г) $(\forall x \in R)\,(\forall y \in R)\,(x^2 = y^2 \to |x| = |y|)$;
д) $(\forall x \in R)\,(\forall y \in R)\,((xy > 0 \wedge y > 0) \to x > 0)$;
е) $(\forall x \in R)\,(\forall y \in R)\,(xy > 0 \to (x > 0 \wedge y > 0))$;
ж) $(\forall x \in R)\,(\forall y \in R)\,(xy > 0 \to (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0))$?

109. Найдите множества истинности для следующих высказывательных форм от переменной y из R:

а) $(\forall x \in R)\,(x^2 + y^2 = 1)$;
б) $(\forall x \in R)\,(x^2 + y^2 = 0)$;
в) $(\exists x \in R)\,(x^2 + y^2 = 1)$;
г) $(\exists x \in R)\,(xy < 1)$;
д) $(\exists x \in R)\,(x^2 + 1 < y)$;
е) $(\exists x \in R)\,(\sqrt{x^2 - 1} = y)$.

110. Используя высказывательные формы $x = y$, $x < y$, $x \leqslant y$ (x и y — натуральные числа) и обозначения арифметических действий, запишите в символической форме следующие высказывания:

а) число x четно;
б) число x является суммой квадратов двух натуральных чисел;
в) число x — простое;
г) число x — составное;
д) число x — наименьшее общее кратное чисел 6 и 8;
е) остаток от деления числа x на 4 равен 1 или 2.

6. Уравнения, неравенства и тождества. Поскольку уравнения и неравенства, содержащие переменную, являются высказывательными формами, все, сказанное выше для таких форм, применимо к уравнениям и неравенствам. Например, два уравнения (соответственно два неравенства) называются эквивалентными, если их множества истинности совпадают, или, что то же самое, если они имеют одно и то же множество корней. Так, уравнение $x^2 - 8x + 12 = 0$ эквивалентно уравнению $3x^2 - 24x + 40 = 4$ — для обоих множество корней состоит из чисел 2 и 6, $T = \{2; 6\}$. Неравенство $2x > 8$ эквивалентно неравенству $3x > 12$ — для обоих неравенств множеством решений (т. е. множеством истинности) является числовой луч $]4; +\infty[$.

При решении уравнений и неравенств их заменяют эквивалентными уравнениями и неравенствами, т. е. преобразуют, не изменяя их множеств истинности. В этом случае можно не проверять полученное решение, поскольку на каждом шагу оно не изменялось и потому совпадает для заданного уравнения и уравнения, получившегося в ходе преобразований. Но не всегда удается решить уравнение таким способом. Иногда приходится переходить от данного уравнения не к эквивалентному, а лишь к его следствию. Если, преобразуя уравнение

$$f_1(x) = g_1(x), \qquad (1)$$

мы приходим к уравнению

$$f_2(x) = g_2(x), \qquad (2)$$

которое является следствием уравнения (1), то множество корней уравнения (2) содержит множество корней уравнения (1). Поэтому, решив уравнение (2), надо еще проверить, удовлетворяют ли эти корни исходному уравнению (1).

Пример. Решим уравнение $\sqrt{2x+1} = x - 1$.
Если $a = b$, то $a^2 = b^2$. Поэтому, возведя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение, являющееся его следствием:

$$2x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

(оно не обязательно равносильно исходному уравнению, так как из $a^2 = b^2$ не следует, что $a = b$, — может случиться, что $a = -b$). Решая это уравнение, находим, что $T_2 = \{0; 4\}$. Проверим эти корни, подставляя их в заданное уравнение:

$\sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 0 - 1$ (ложно); $\sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 4 - 1$ (истинно).

Значит, решением этого уравнения является $\{4\}$.

Поскольку мы условились считать ложными бессмысленные высказывания, корнями уравнения $f(x) = g(x)$ не могут быть значения, при которых $f(x)$ или $g(x)$ не имеют смысла. Поэтому полезно перед решением уравнения найти эти значения; исключив их, получим так называемую *область определения уравнения*. Числа, не принадлежащие этой области, можно не исследовать: они заведомо не могут быть корнями уравнения. Следует иметь в виду, что область определения уравнения изменяется при некоторых преобразованиях, считаемых обычно тождественными. Например, уравнения

$$2x + \frac{1}{x-3} = 6 + \frac{1}{x-3} \qquad (3)$$

и

$$2x = 6$$

имеют различные области определения — число 3 не принадлежит области определения уравнения (3). При решении уравнения (3) его заменяют сначала уравнением

$$2x + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-3} = 6 + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-3},$$

а потом приводят подобные члены и получают уравнение $2x = 6$. Но при этом область определения расширяется и корень 3 уравнения $2x = 6$ не удовлетворяет уравнению (3).

Корнями уравнения

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$$

могут быть лишь числа, обращающие в нуль хотя бы один из множителей $f_1(x)$, $f_2(x)$ и принадлежащие области определения второго множителя. Поэтому, если обозначить область определения $f_1(x)$ через T_1, а $f_2(x)$ через T_2, то истинна эквивалентность

$$(f_1(x) \cdot f_2(x) = 0) \Leftrightarrow ((f_1(x) = 0 \vee f_2(x) = 0) \wedge (x \in T_1 \cap T_2)).$$

На этой эквивалентности основан метод решения уравнений с помощью разложения на множители.

Рассмотрим теперь уравнения с двумя переменными. Множество истинности такого уравнения изображается совокупностью точек $M(x, y)$ координатной плоскости, при подстановке координат которых уравнение обращается в истинное высказывание. Например, для уравнения $x^2 + y^2 = 25$ этим множеством является окружность радиуса 5 с центром в начале координат.

Так как множество истинности для уравнения $f(x, y) = 0$ обычно бесконечно, рассматривают *системы* двух таких уравнений, т. е. *конъюнкции* вида

$$(f_1(x, y) = 0) \wedge (f_2(x, y) = 0). \tag{4}$$

В школе конъюнкции обычно записывают в виде

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Как мы уже знаем, множество истинности для конъюнкции (4) (т. е. решение системы уравнений (5)) является пересечением множеств истинности входящих в нее уравнений. На этом основан графический метод решения систем уравнений: изображают на плоскости множество истинности каждого из уравнений системы и находят пересечение получившихся линий.

Пример. Решим графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3y = 4x. \end{cases}$$

Так как $x^2 + y^2 = 25$ — уравнение окружности с центром O (0; 0) и радиусом 5, а $3y = 4x$ — уравнение прямой, то достаточно найти точки пересечения прямой и окружности (рис. 9). Находим две точки: A (3; 4) и B (—3; —4). Значит, $T = \{(3; 4), (-3; -4)\}$.

При решении систем уравнений их обычно заменяют эквивалентными системами уравнений. Иными словами, входящие в систему уравнения заменяют другими так, что при этом не изменяется пересечение множества истинности (хотя сами множества истинности для отдельных уравнений могут и меняться).

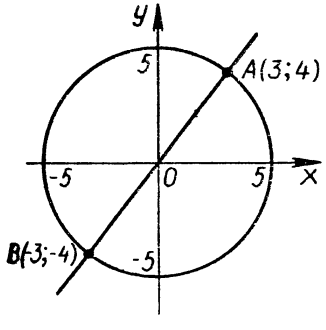


Рис. 9

Все сказанное выше относится и к решению *неравенств*. Например, решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ x + y \geqslant 0 \end{cases}$$

все равно что найти множество истинности конъюнкции

$$(x^2 + y^2 \leqslant 4) \wedge (x + y \geqslant 0).$$

Для этого надо найти пересечение областей, задаваемых этими неравенствами (рис. 10).

Теперь рассмотрим понятие *тождества*. В школе обычно тождеством называют равенство, содержащее переменные и истинное для всех значений переменной, например:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

Запись

$$(\forall x \in R)\ (x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2)$$

показывает, что равенство выполняется для всех значений x.

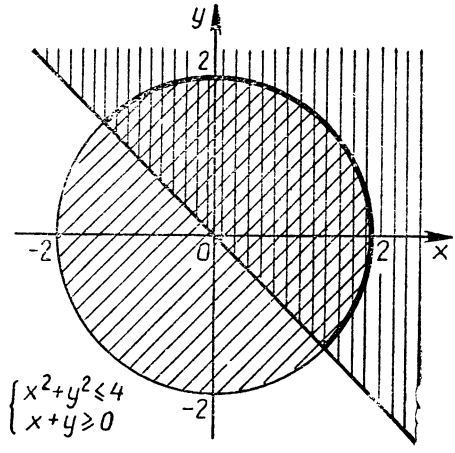


Рис. 10

Упражнения

111. Решите следующие неравенства:

а) $\frac{x^2-4}{x^2-16} \geqslant 0$; б) $\frac{x^2+x-2}{x^2-x+12} < 0$; в) $x^2 > 0$;

г) $\frac{x^2-6x+8}{x^2-4} \geqslant 0$.

112. Решите следующие неравенства:

а) $\frac{x^2-2}{x^2-1} \geqslant 0$; б) $\frac{x^2-7}{x^3+8} \leqslant 0$; в) $x^2 + 2x + 2 < 0$;

г) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+8} \geqslant 0$.

113. Решите следующие дизъюнкции и конъюнкции уравнений и неравенств:

а) $(x + y = 9) \wedge (xy = 14)$;
б) $(x^2 + y^2 = 169) \wedge (x^2 - y^2 = 119)$;
в) $(x^2 + y^2 = 29) \wedge (xy = 10)$;
г) $(x^2 + 8x + 11 = 0) \vee (x^2 - 6x + 8 = 0)$;
д) $(x^2 - 20x + 64 = 0) \vee (|x - 3| + |x + 2| = 5)$;
е) $(|x - 7| + |x + 3| = 10) \vee (|x - 2| + |x + 10| = 12)$;
ж) $(y < 9 - x^2) \wedge (y \geqslant x^2)$;
з) $(x^2 + y^2 \leqslant 25) \wedge (x + y = -1)$;
и) $(x^2 + y^2 \leqslant 25) \wedge (y > x^2)$;
к) $(y \geqslant \frac{1}{2}x^2) \wedge (y \geqslant \frac{3}{2}x - 1)$;
л) $(x^2 + y^2 \leqslant 25) \wedge (y = \frac{4}{9}x^2)$;

м) $(2x - 3 > x - 5) \vee (x^2 - 4x + 3 > 0)$;
н) $(\overline{x^2 + y^2 \leqslant 9}) \wedge (x + y \geqslant 0)$;
о) $((x - 2y)(x + y) = 0) \wedge (x^2 + y^2 = 50)$;
п) $(x^2 - 3xy + 2y^2 = 0) \wedge (x + 4y = 5)$.

7. Отрицание высказываний, содержащих кванторы. Отрицанием высказывания «Все волки серы» отнюдь не является предложение «Все волки не серы». На самом деле, достаточно увидеть хотя бы одного белого волка, чтобы убедиться в ложности того, что все волки серы. Таким образом, для того чтобы высказывание $(\forall x \in X)\ P(x)$ оказалось ложным, достаточно, чтобы нашелся хотя бы один элемент a из X, для которого $P(a)$ ложно, т. е. $\overline{P}(a)$ истинно. Но в этом случае истинно высказывание $(\exists x \in X)\ \overline{P}(x)$. Обратно, если $(\exists x \in X)\ \overline{P}(x)$ истинно, то $(\forall x \in X)\ P(x)$ ложно. Мы доказали, таким образом, что

$$\overline{(\forall x \in X)\ P(x)} \Leftrightarrow (\exists x \in X)\ \overline{P}(x). \qquad (6)$$

Если обозначить здесь $\overline{P}(x)$ через $Q(x)$ и взять отрицания обеих частей равенства (6), то получим, что

$$(\forall x \in X)\ \overline{Q}(x) \Leftrightarrow \overline{(\exists x \in X)\ Q(x)}. \qquad (7)$$

И действительно, отрицая, что есть хотя бы один элемент a в X, для которого истинно $Q(a)$, мы утверждаем, что для всех элементов из X истинно отрицание формы $Q(x)$, т. е. $\overline{Q}(x)$.

Если высказывание содержит несколько кванторов, то с каждым из них поступают по указанному правилу, например:

$$\overline{(\exists x \in X)\ (\forall y \in Y)\ P(x, y)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in X)\ (\exists y \in Y)\ \overline{P}(x, y). \qquad (8)$$

Примеры.

1. Пусть $P(x)$ — форма «Натуральное число x делится на 7». Тогда $\forall x\ P(x)$ — «Все натуральные числа делятся на 7» (ложно), а отрицание этого высказывания $\overline{\forall x P(x)}$ означает «Не все натуральные числа делятся на 7» (истинно). Это отрицание можно записать в виде $\exists x \overline{P}(x)$. Тогда оно читается так: «Существует натуральное число, не делящееся на 7». Высказывание $\exists x P(x)$ читается «Существуют натуральные числа, делящиеся на 7» (истинно), $\overline{\exists x P(x)}$ означает «Не существует натуральных чисел, делящихся на 7» (ложно). Вместо $\overline{\exists x P(x)}$ можно написать $\forall x \overline{P}(x)$. Это читается так: «Все натуральные числа не делятся на 7».

2. Пусть $P(x)$ — форма «Число ног у x равно 8». Тогда $\forall x P(x)$ означает «У всех x число ног равно 8», $\exists x P(x)$ — «Существует x с 8 ногами», $\overline{\forall x P(x)}$ — «Не у всех x число ног равно 8», что то же самое «Существует x, у которого число ног отлично от 8», а $\overline{\exists x P(x)}$ — «Не существует x с 8 ногами», или, что то же самое, «Ни у какого x нет 8 ног». Если X — множество зайцев, то истинны высказы-

вания $\forall x P(x)$ и $\exists x \overline{P(x)}$, а ложны $\forall x P(x)$ и $\exists x P(x)$. А если X — множество пауков, то истинны $\forall x P(x)$ и $\exists x P(x)$ и ложны $\forall x \overline{P(x)}$ и $\exists x \overline{P(x)}$. Наконец, если X — множество всех живых существ, то истинны $\forall x \overline{P(x)}$ и $\exists x P(x)$.

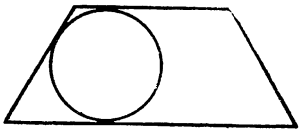


Рис. 11

3. Пусть $P(x, y)$ означает «Человек x родился в году y». Тогда $\forall y \exists x P(x, y)$ читается «Для любого года y есть родившийся в этом году человек x». Отрицанием этого высказывания служит $\exists y \forall x \overline{P}(x, y)$, означающее, что существует год y, в котором не родился ни один человек.

4. Пусть $P(x, y)$ означает «Окружность x вписана в четырехугольник y». Тогда $\forall y \exists x P(x, y)$ означает теорему «Для всякого четырехугольника есть вписанная в него окружность». Отрицанием этого утверждения является $\exists y \forall x \overline{P}(x, y)$ «Существует четырехугольник, в который не вписана ни одна окружность». Поскольку такие четырехугольники действительно существуют (рис. 11), то отрицание теоремы истинно, а сама теорема ложна. А теорема $\forall y \exists x P(x, y)$, где $P(x, y)$ читается «Окружность x вписана в квадрат y», истинна: во всякий квадрат можно вписать окружность. Истинна она и если $P(x, y)$ читается «Окружность x вписана в треугольник y».

Упражнения

114. Пусть $P(x)$ — высказывательная форма «Число x делится на 5», а $Q(x)$ означает «Число x четно». Прочтите высказывание

$$(\exists x \in N)\,(P(x) \wedge Q(x))$$

и постройте его отрицание.

115. Пусть $P(x, y)$ — высказывательная форма «Окружность x вписана в треугольник y». Прочтите высказывания:

а) $\forall x \forall y P(x, y)$; б) $\exists x \forall y P(x, y)$;

в) $\forall x \exists y P(x, y)$; г) $\forall y \exists x P(x, y)$;

д) $\exists y \forall x P(x, y)$; е) $\exists x \exists y P(x, y)$

и постройте их отрицания.

116. Докажите или опровергните следующие предложения, образовав их отрицания и перейдя к двойственным кванторам:

а) все простые числа нечетны;

б) всякий четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны, —ромб;

в) все корни уравнения $|x| = -1$ — рациональные числа;

г) все элементы пустого множества принадлежат множеству M;

д) любое решение неравенства $x^2 < 0$ является решением уравнения $x^2 - 9 = 0$;

е) всякое квадратное уравнение имеет действительный корень.

117. Запишите символически следующие высказывания и их отрицания; определите значения истинности данных высказываний и их отрицаний:

а) для всякого рационального числа x найдется рациональное число y такое, что $x + y = x$;

б) существует натуральное число x такое, что для всякого натурального числа y $x + y = y$;

в) существует целое число x такое, что для любого целого y $x + y = 0$;

г) всякое целое число имеет противоположное;

д) каково бы ни было натуральное число x, найдется натуральное число y такое, что $xy = x$;

е) существует такое целое число x, что произведение его с любым целым числом равно x;

ж) для всякого числа, не равного 0, найдется число, дающее в произведении с ним 1;

з) существует такое число, что произведение его с любым другим, не равным 0 числом равно 1.

118. Сформулируйте отрицания следующих высказываний в утвердительной форме (т. е. так, чтобы отрицание данного высказывания не начиналось со слов «не» или «неверно, что»):

а) в каждом городе есть район, в каждой школе которого есть класс, все ученики которого учатся без троек;

б) существует город, в каждом районе которого есть футбольная команда, все игроки которой не старше 18 лет;

в) в каждом городе есть улица, на которой, по крайней мере, в одном доме все окна выходят на юг;

г) существует книга, на каждой странице которой есть не менее чем одна строка, в которой буква «ы» встречается по меньшей мере два раза;

д) в каждом городе хотя бы одна улица застроена только такими домами, в которых есть однокомнатные квартиры.

8*. Строение математической теоремы. Большинство математических теорем формулируется так: на некотором множестве X из высказывательной формы $A(x)$ следует $B(x)$. Такие теоремы можно записать в виде:

$$(\forall x \in X)\ (A(x) \to B(x)). \qquad (1)$$

Эти теоремы состоят из трех частей: описания множества X, к элементам которого эта теорема относится, формы $A(x)$ (условия теоремы) и формы $B(x)$ (заключения теоремы).

Примеры.

1. В теореме «Если диагонали параллелограмма равны, то он является прямоугольником» X — множество всех параллелограммов, $A(x)$ — форма «Диагонали параллелограмма x равны» и $B(x)$ — форма «Параллелограмм x является прямоугольником». Эта теорема истинна.

2. В теореме «Если последняя цифра натурального числа x равна 0 или 5, то это число делится на 5» X — множество натуральных чисел, $A(x)$ — «Последняя цифра числа x равна 0 или 5» и $B(x)$ — «Число x делится на 5». В этом примере условие является конъюнкцией двух форм: $A_1(x)$ — «Последняя цифра числа x равна 0» и $A_2(x)$ — «Последняя цифра числа x равна 5». Поэтому развернутая запись теоремы такова:

$$(\forall x \in N)\,((A_1(x) \wedge A_2(x)) \to B(x)).$$

3. В теореме «Если последняя цифра натурального числа x равна 3, то это число делится на 3» X — множество натуральных чисел, $A(x)$ — форма «Последняя цифра числа x равна 3» и $B(x)$ — форма «Число x делится на 3». Эта теорема ложна. $A(13)$ истинно, а $B(13)$ ложно (последняя цифра числа 13 равна 3, но это число не делится на 3). Мы видим, что для доказательства ложности теоремы (1) достаточно найти хотя бы один элемент $x \in X$, для которого $A(x)$ истинно, а $B(x)$ ложно.

Теорема может содержать и формы от нескольких переменных. Например, теорема «Большей дуге окружности соответствует большая хорда» записывается в виде

$$\forall x\ \forall y\ (A(x, y) \to B(x, y)).$$

Здесь x и y — дуги окружности, $A(x, y)$ означает «Дуга x больше дуги y», $B(x, y)$ — «Хорда, стягивающая дугу x, больше хорды, стягивающей дугу y».

Кроме того, не всегда теоремы записываются явно с использованием импликации. Например, закон коммутативности сложения имеет вид:

$$\forall x\ \forall y\ (x + y = y + x).$$

В него входит форма $x + y = y + x$, и закон утверждает, что она истинна для любых чисел x и y. Теорема «Для каждого треугольника существует вписанная в него окружность» записывается в виде

$$\forall x\ \exists y\ A(x, y),$$

где $A(x, y)$ означает «Окружность y вписана в треугольник x».

Встречаются теоремы более сложного строения, в которых как условие, так и заключение являются дизъюнкциями или конъюнкциями многих высказывательных форм, но общая структура теоремы часто имеет вид (1).

По аналогии с понятиями обратной и противоположной импликаций введем понятия прямой, обратной и противоположной теорем. Для теоремы

$$(\forall x \in X)\,(A(x) \to B(x)) \tag{2}$$

обратной назовем теорему

$$(\forall x \in X)\,(B(x) \to A(x)), \tag{3}$$

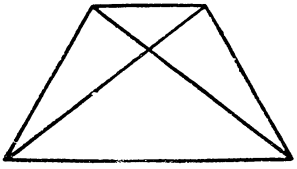


Рис. 12

противоположной — теорему

$$(\forall x \in X)\ (\overline{A}\ (x) \to \overline{B}\ (x)) \qquad (4)$$

и обратной к противоположной — теорему

$$(\forall x \in X)\ (\overline{B}\ (x) \to \overline{A}\ (x)). \qquad (5)$$

Теоремы (3) и (4) равносильны друг другу, равно как и теоремы (2) и (5).

Примеры.

1. Теорему «Во всяком квадрате диагонали равны» можно записать в виде (2), где X — множество всех четырехугольников, $A\ (x)$ — «Четырехугольник x является квадратом», а $B\ (x)$ — «Диагонали четырехугольника x равны друг другу». Значит, обратная теорема (3) гласит: «Если диагонали четырехугольника равны друг другу, то этот четырехугольник является квадратом». Противоположная теорема (4) такова: «Если четырехугольник не является квадратом, то его диагонали не равны друг другу». Наконец, теорема, обратная к противоположной (5), такова: «Если диагонали четырехугольника не равны друг другу, то этот четырехугольник не является квадратом». В данном случае истинны прямая теорема и теорема, обратная к противоположной, а обратная и противоположная теоремы ложны. На рисунке 12 изображен четырехугольник с равными диагоналями, не являющийся квадратом.

2. Для теоремы «Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм является прямоугольником» обратная теорема формулируется так: «Если параллелограмм является прямоугольником, то его диагонали равны» (или, короче, «Во всяком прямоугольнике диагонали равны»). В этом случае истинны и прямая и обратная теоремы. Поэтому их можно заменить одной теоремой:

«Параллелограмм является прямоугольником в том и только в том случае, когда его диагонали равны», или иначе:

«Для того чтобы параллелограмм был прямоугольником, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали равнялись друг другу».

Эта теорема имеет вид

$$(\forall x \in X)\ (A\ (x) \leftrightarrow B\ (x)), \qquad (6)$$

где X — множество параллелограммов, $A\ (x)$ означает «Параллелограмм x является прямоугольником», а $B\ (x)$ — «Диагонали параллелограмма x равны». Все теоремы такого вида эквивалентны обратным теоремам, а также противоположным им теоремам: они или одновременно истинны, или одновременно ложны. В данном случае все теоремы истинны. Но если бы мы заменили множество параллелограммов множеством всех четырехугольников, то теорема вида (6) оказалась бы ложной. Истинной была бы лишь теорема вида $(\forall x \in X)\ (A\ (x) \to B\ (x))$, а обратная ей теорема

ложна (поскольку существуют четырехугольники с равными диагоналями, не являющиеся прямоугольниками).

Упражнения

119. Запишите символически аксиому параллельности (через каждую точку проходит не более одной прямой, параллельной данной прямой) и ее отрицание. Дайте словесную формулировку отрицания.

120. Запишите символически:

а) определение периодической функции, заданной на R (функция называется периодической, если существует такое число $l \neq 0$, что при любом x $f(x - l) = f(x) = f(x + l)$);

б) необходимое и достаточное условие истинности утверждения «Функция f не является периодической».

121. Докажите, что функция f не является периодической, если:

а) $f(x) = x^2$, б) $f(x) = [x]$, где $[x]$ — целая часть x.

122. Запишите символически:

а) определение четной функции (функция f называется четной, если вместе с каждым значением переменной x из области определения значение $-x$ также входит в область определения этой функции, и для любого x из области определения f выполняется равенство $f(-x) = f(x)$);

б) определение нечетной функции (функция f называется нечетной, если вместе с каждым значением переменной x из области определения значение $-x$ также входит в область определения этой функции и для любого x из области определения f выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$);

в) необходимое и достаточное условие истинности утверждений: «Функция f не является четной», «Функция f не является нечетной».

123. Две различные функции заданы одной и той же формулой. Может ли быть, что одна из них четная, а другая — нечетная?

124. Запишите приведенные ниже теоремы в символической форме и найдите для них обратные, противоположные и обратные противоположным. Для этих теорем постройте отрицания. Укажите, какие из теорем истинны.

а) Если в треугольнике ABC угол B прямой, то

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2.$$

б) Если четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, то его диагонали делят друг друга пополам.

в) Во всяком параллелограмме есть центр симметрии.

г) Если сумма цифр десятичной записи натурального числа делится на 5, то это число делится на 5.

д) Если прямая a параллельна прямой b, а прямая b параллельна прямой c, то прямая a параллельна прямой c.

е) Если прямая a перпендикулярна прямой b, а прямая b параллельна прямой c, то прямые a и c перпендикулярны.

МНОЖЕСТВА НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Начиная с V класса в школе строят графики различных функциональных зависимостей: линейной $y = kx + b$, квадратичной $y = ax^2$, обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ и т. д. Часто, однако, приходится иметь дело с более сложными функциональными зависимостями. По мере расширения класса изучаемых функций расширяется класс линий, служащих их графиками. Рассматривают не только графики функций, но и графики уравнений с двумя переменными, т. е. уравнений вида $F(x, y) = 0$. *Графиком уравнения* $F(x, y) = 0$ называют множество Γ всех точек $M(a, b)$, координаты которых удовлетворяют этому уравнению; $F(x, y) = 0$ называют *уравнением множества* Γ.

Здесь будет рассказано, как получать уравнения линий по их геометрическим определениям и, исходя из уравнения какой-нибудь линии, выводить уравнения других линий, получаемых из нее различными геометрическими преобразованиями, а также как строят графики функций.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ЛИНИЙ ПО ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ СВОЙСТВАМ

1. Координатная прямая. Чтобы задать на прямой направление и единицу измерения длины, достаточно указать на ней две различные точки — O и E; направление от O к E будем считать *направлением* прямой, а длину отрезка OE — *единицей* измерения длин. Рассмотрим теперь произвольную точку M прямой OE. Эта точка может располагаться как «справа», так и «слева» от O (и, конечно, M может совпадать с O). Если M не совпадет с O, то лучи OM и OE могут быть либо сонаправлены, либо противонаправлены. Назовем *координатой* точки M длину отрезка OM, взятую со знаком плюс или минус, в зависимости от того, сонаправлены или противонаправлены лучи OM и OE. Координату точки O положим равной нулю.

Пару точек (O, E) назовем *системой координат* на прямой, а саму прямую, на которой задана система координат, — *координатной прямой* или *осью*. Точка O в этом случае называется *началом* координат.

Тот факт, что точка M имеет координату x, символически записывается так: $M(x)$. Например, $O(0)$, $E(1)$ и т. д.

Можно доказать, что соответствие $x \to M(x)$ между множеством всех действительных чисел и множеством точек на прямой взаимно-однозначно (хотя строгое доказательство этого утверждения потребовало бы выяснения того, что такое число и что такое точка).

Рассмотрим произвольную точку $M(x)$ координатной прямой. Нетрудно заметить, что длина отрезка OM и координата x точки M связаны соотношением

$$|OM| = |x|. \qquad (1)$$

Иными словами, **модуль координаты точки M геометрически есть длина отрезка между началом координат и точкой M.**

Формулу (1) можно обобщить, получив выражение для расстояния между произвольными точками координатной прямой.

Пусть на координатной прямой даны две точки: $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ (рис. 1). Докажем, что

$$|M_1M_2| = |x_1 - x_2|. \qquad (2)$$

Для доказательства формулы (2) достаточно рассмотреть все случаи различного расположения точек O, M_1 и M_2. Если, например, M_2 лежит между M_1 и O, причем $\overrightarrow{OM_1}$ (следовательно, и $\overrightarrow{OM_2}$) направлен так же, как и координатная ось, то координаты точек M_1 и M_2 будут положительны, т. е.

$$|x_1| = x_1$$
$$|x_2| = x_2,$$

причем $x_1 > x_2$. Тогда

$$|M_1M_2| = |OM_1| - |OM_2| = |x_1| - |x_2| = x_1 - x_2 = |x_1 - x_2|.$$

Аналогично рассматриваются и остальные случаи. Таким образом, **расстояние между точками координатной прямой равно модулю разности их координат.**

Этот факт часто используется при решении уравнений и неравенств «в уме». Пусть, например, надо решить уравнение

$$|x - 2| = 1. \qquad (3)$$

«Переведем» эту запись на геометрический язык. Условие (3) означает, что расстояние от точки с неизвестной координатой x до точки с координатой 2 равно 1.

Очевидно, что этому условию удовлетворяют всего две точки, расположенные на координатной прямой на расстоянии 1 по разные стороны от точки с координатой 2, т. е. точки с координатами 1 и 3.

Поэтому решением уравнения будет $\{1, 3\}$.

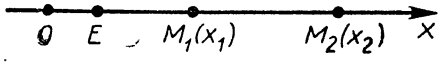


Рис. 1

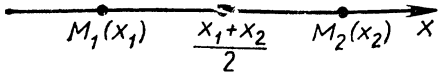


Рис. 2

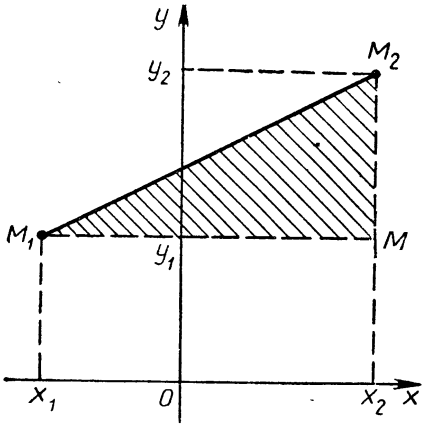


Рис. 3

Аналогично, решением неравенства

$$|x - 2| < 1 \qquad (4)$$

будут точки открытого промежутка (1, 3), поскольку условие (4) при «переводе» его на язык геометрии означает, что точки с координатами x удалены от точки с координатой 2 на расстояние, меньшее 1.

Полезно знать еще и формулу, выражающую координату середины M (x) отрезка между точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ (рис. 2):

$$x_{\text{сер}} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Ее доказательство мы предоставляем читателям в качестве упражнения.

Упражнения

1. Найдите расстояние между точками: а) M_1 (3), M_2 (8); б) M_1 (9), M_2 (1); в) M_1 (—7), M_2 (10); г) M_1 (—5), M_2 (—1); д) M_1 (—3), M_2 (0).

2. Решите «в уме» уравнения:

$$|x - 5| = 2; \qquad |x - (-5)| = 2;$$
$$|x + 3| = 1; \qquad |x - 2| = |x - 4|.$$

3. Решите неравенства:

$$|x| < 4; \qquad |x - 1| < 2;$$
$$|x - 1| > 2; \qquad |x - 5| \leqslant 1;$$
$$|x - 5| > 1; \qquad 1 \leqslant |x - 5| \leqslant 2.$$

4. Найдите координаты точек B, C, E, делящих отрезок M_1M_2 на четыре равные части, если M_1 (—4), M_2 (8).

2. Координаты на плоскости. Чтобы задать положение точки на плоскости, надо указать два числа. Для этого возьмем три точки — O, E_1, E_2, такие, что прямые OE_1 и OE_2 перпендикулярны, а длины отрезков OE_1 и OE_2 одинаковы. Пары (O, E_1) и (O, E_2) задают на этих прямых координатные системы. Возьмем точку M на плоскости и опустим из нее перпендикуляры MM_1 и MM_2 на прямые OE_1 и OE_2. Точки M_1 и M_2 этих прямых имеют на них координаты, которые обозначим соответственно x и y. Принято называть x *абсциссой* точки M, а y — ее *ординатой*. В соответствии с этим ось OE_1 называют *осью абсцисс*, а ось OE_2 — *осью ординат*.

Плоскость, на которой выбрана система координат (O, E_1, E_2), называют *координатной плоскостью*, точку O называют *началом координат*. Оси абсцисс и ординат делят координатную плоскость на 4 части, называемые *четвертями* или *координатными углами*.

Каждой точке M координатной плоскости соответствует, таким образом, пара чисел (x, y) — *координаты* этой точки. Обратно, каждой паре чисел (x, y) соответствует точка M на координатной плоскости, имеющая координаты x и y. Точку M с координатами (x, y) будем обозначать $M(x, y)$.

Выведем формулу для расстояния между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ координатной плоскости (рис. 3). По теореме Пифагора получаем $|M_1M_2| = \sqrt{|M_1M|^2 + |MM_2|^2}$. Но расстояние между точками M_1 и M равно, очевидно, расстоянию между их проекциями N_1 и N_2 на ось абсцисс. Точки N_1 и N_2 имеют, соответственно, абсциссы x_1 и x_2, а потому по формуле (2) $|N_2N_1| = |x_2 - x_1|$. Значит, и $|MM_1| = |x_2 - x_1|$. Точно так же устанавливаем, что $|MM_2| = |y_2 - y_1|$. Поскольку $|a|^2 = a^2$, то

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{5}$$

Аналогичным образом, проектируя отрезок M_1M_2 на оси координат, убеждаемся, что координаты точки $M(x, y)$ — середины отрезка M_1M_2, где $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ выражаются формулами

$$x_{\text{сер}} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_{\text{сер}} = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{6}$$

Упражнения

5. Найдите расстояние между точками: $A(0, -1)$, $B(-4, 2)$; $A(3, -4)$, $O(0, 0)$.

6. Для точек $A(-4, 2)$, $B(3, 8)$, $C(4, 4)$ найдите точки, симметричные с ними относительно:

а) оси абсцисс,

б) оси ординат,

в) начала координат,

г) биссектрисы первого и третьего координатных углов,

д) биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

7. Проверьте, что треугольник ABC с вершинами $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(5, -1)$ прямоугольный.

8. Даны координаты точек $A(-5, 6)$ и $B(3, 1)$.

а) Найдите координаты точки M, симметричной точке A относительно точки B.

б) Найдите координаты точки N, симметричной точке B относительно точки A.

9. Зная две противолежащие вершины ромба $A(8, -3)$, $C(10, 11)$ и длину его стороны $|AB| = 10$, определите координаты остальных вершин ромба.

10. Вычислите длину медиан треугольника ABC, зная координаты его вершин $A(3, -2)$, $B(5, 2)$, $C(-1, 4)$.

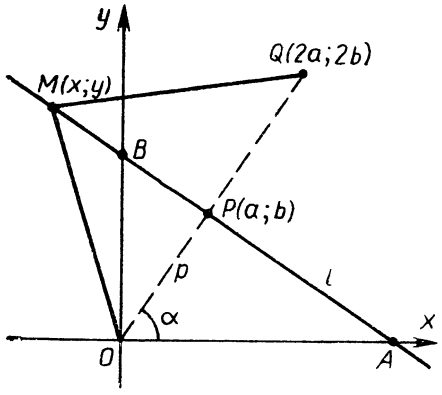


Рис. 4

3. Уравнение прямой линии. Положение прямой линии l на координатной плоскости можно задавать различными способами.

Если прямая l не проходит через начало координат, то ее положение можно задать, указав координаты точки пересечения $P(a, b)$ этой прямой с перпендикуляром OP, опущенным на нее из начала координат. В самом деле, чтобы построить l, нужно соединить точки O и P и из точки P восставить перпендикуляр к отрезку OP (рис. 4).

Выведем уравнение прямой l, проходящей через точку $P(a, b)$ перпендикулярно отрезку OP. Для этого заметим, что точка P является серединой отрезка OQ, где $Q(2a, 2b)$. Поэтому все точки $M(x, y)$ прямой l одинаково удалены от точек O и Q, и, следовательно, $|OM|^2 = |MQ|^2$. Но, по формуле (5) имеем

$$|OM|^2 = x^2 + y^2,\ |MQ|^2 = (x - 2a)^2 + (y - 2b)^2,$$

а потому

$$x^2 + y^2 = (x - 2a)^2 + (y - 2b)^2. \qquad (7)$$

При этом ни для одной точки, не лежащей на прямой l, равенство (7) не имеет места, так как для этих точек $|OM| \neq |MQ|$.

Значит, (7) — уравнение прямой l. Раскрывая скобки и упрощая, получаем уравнение

$$ax + by - (a^2 + b^2) = 0. \qquad (8)$$

Заметим, что $a^2 + b^2 = p^2$, где через p обозначена длина отрезка OP. Поэтому (8) можно переписать в следующем виде:

$$ax + by - p^2 = 0. \qquad (9)$$

При умножении обеих частей уравнения на число, отличное от нуля, получается уравнение, равносильное данному. Очевидно, что графики таких уравнений одинаковы. Поэтому прямую можно задать также уравнением

$$\frac{a}{p}x + \frac{b}{p}y - p = 0, \qquad (9')$$

получаемым путем умножения обеих частей уравнения на $\frac{1}{p}$. Из треугольника OAP видно, что $\frac{a}{p} = \cos\alpha$, $\frac{b}{p} = \sin\alpha$, где α — угол между положительным направлением оси абсцисс и лучом OP (угол отсчитывают против часовой стрелки). Поэтому уравнение (9′) можно записать так:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \qquad (10)$$

Такое уравнение называют *нормальным уравнением прямой.*

Если прямые l и l_1 параллельны, то они перпендикулярны одной и той же прямой OP, а поэтому углы α и α_1 для этих прямых или равны, или отличаются на 180° (рис. 5).

Мы предполагали до сих пор, что прямая l не проходит через начало координат. Если она проходит через точку O (0, 0), то ясно, что для нее $p = 0$, и потому уравнение (10) принимает вид $x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0$, где α — угол между положительным направлением оси абсцисс и перпендикуляром к прямой.

Если умножить обе части нормального уравнения прямой на число λ, отличное от нуля, и положить $\lambda \cos \alpha = A$, $\lambda \sin \alpha = B$, $-\lambda p = C$, то получится уравнение

$$Ax + By + C = 0. \qquad (11)$$

Для прямых, проходящих через начало координат, $C = 0$. Числа A, B, C не являются однозначно определенными — прямая задает не сами эти числа, а лишь их отношения $A : B : C$.

Итак, уравнение любой прямой может быть записано в виде (11), поэтому (11) называют *общим уравнением прямой.* С другой стороны, всякое уравнение вида (11) можно привести к виду (10), для этого надо умножить обе части уравнения (11) на такой множитель N, что $(NA)^2 + (NB)^2 = 1$, причем знаки N и C противоположны.

Если прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ параллельны, то после приведения их к виду (10) значения синусов и значения косинусов будут или равны, или противоположны по знаку. Отсюда следует, что $A_1 = \mu A_2$, $B_1 = \mu B_2$ и потому $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Легко показать и обратное, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, то прямые параллельны.

В школе изучают уравнение прямой, имеющее вид $y = kx + b$. К этому виду общее уравнение прямой можно привести в случае, когда $B \neq 0$. Разделив все члены уравнения $Ax + By + C = 0$ на B и преобразовав, получим $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Положив $-\frac{A}{B} = k$, $-\frac{C}{B} = b$, получим $y = kx + b$. Число k называют *угловым коэффициентом* прямой, а b — ее *начальной ординатой.* Легко проверить, что b равно величине отрезка, отсекаемого прямой от оси ординат. У параллельных прямых угловые коэффициенты одинаковы.

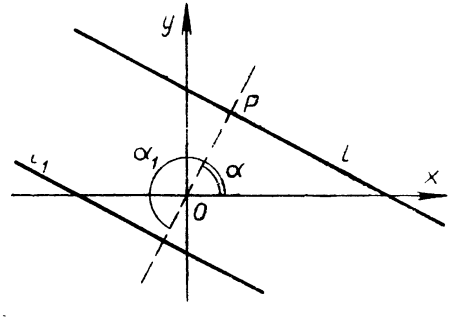


Рис. 5

Если $B = 0$, но $A \neq 0$, уравнение прямой можно записать в виде $x = -\frac{C}{A}$. Абсциссы всех точек этой прямой одни и те же, а потому такая прямая параллельна оси ординат. Обратно, уравнение любой прямой, параллельной оси ординат, имеет вид $x = a$.

Упражнения

11. Подберите коэффициент λ так, чтобы уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ после умножения на λ приняло вид (10). Начертите эту прямую.

12. Найдите величины a и b отрезков, отсекаемых прямой $Ax + By + C = 0$ на осях координат (A, B, $C \neq 0$). Докажите, что уравнение такой прямой можно записать в виде $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

13. Докажите, что если прямые $a_1x + b_1y - p_1^2 = 0$ и $a_2x + b_2y - p_2^2 = 0$ параллельны, то $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$. На основании этого выведите, что условие параллельности прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ имеет вид $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Докажите, что угловые коэффициенты параллельных прямых равны.

14. Напишите уравнение прямой, все точки которой равноудалены от точек M_1 (1, 6) и M_2 (—1, 4).

15. Найдите координаты центра окружности, описанной вокруг треугольника ABC, если A (2, 4), B (3, 7), C (8, 2).

16. Докажите, что прямая $y - y_1 = k(x - x_1)$ при любом значении k проходит через точку M_1 (x_1, y_1).

17. Через точку M (6, —2) проведите прямую[1], параллельную прямой $3x - y + 7 = 0$.

18. Докажите, что угловой коэффициент прямой, проходящей через точки M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2), где $x_1 \neq x_2$, равен

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

19. Докажите, что прямая

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

проходит через точки M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2).

20. Напишите уравнения сторон и медиан треугольника ABC, где A (—5, 2), B (3, 1), C (0, —4).

21. Через вершины треугольника ABC, где A (1, 3), B (5, 2), C (3, 0), проведите прямые, параллельные противолежащим сторонам этого треугольника.

22. Докажите, что множество точек, разность квадратов расстояний которых от точек A (x_1, y_1) и B (x_2, y_2) равна d^2, является прямой.

---

[1] Т. е. напишите уравнение этой прямой. В дальнейшем мы всегда будем рассматривать геометрические построения в их алгебраической форме.

23. Найдите множество точек таких, что касательные, проведенные из этих точек к окружностям Γ_1 и Γ_2, имеют равные длины.

24. Докажите, что если окружности Γ_1 и Γ_2 пересекаются, то множество точек из задачи 23 лежит на прямой, проходящей через точки пересечения этих окружностей.

25. Докажите, что если три окружности попарно пересекаются, то прямые, на которых лежат их общие хорды, пересекаются в одной точке.

26. На рисунке 6 изображено *семейство прямых* $y = kx$, где параметр k принимает произвольные значения. Конечно, мы не сможем нарисовать все эти прямые — мы нарисовали лишь некоторые из них; однако нетрудно представить, как при изменении k от $-\infty$ до $+\infty$ меняется («движется») прямая $y = kx$: она поворачивается так, как указано стрелкой на рисунке 6. Аналогичным образом на рисунке 7 изображено семейство прямых $y = x + l$, $-\infty < l < +\infty$. Нарисуйте подобным образом следующие семейства прямых:

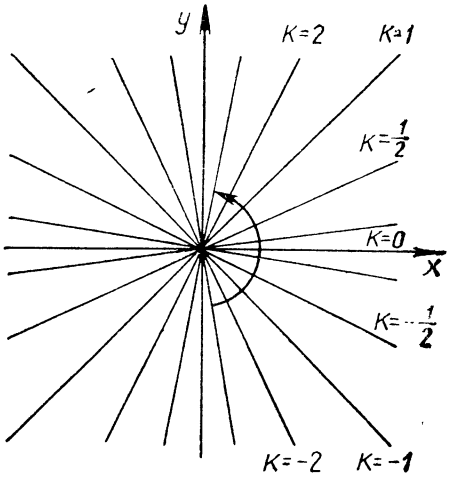


Рис. 6

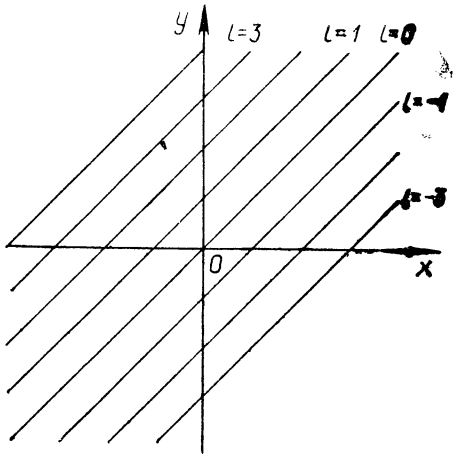


Рис. 7

а) $y = \frac{1}{2}x + l$, $-\infty < l < +\infty$;

б) $y = kx + 2$, $-\infty < k < +\infty$;

в) $y = k(x - 1)$, $-\infty < k < +\infty$;

г) $y = k(x + 1)$, $-\infty < k < +\infty$;

д)* $y = k(x - k)$, $-\infty < k < +\infty$.

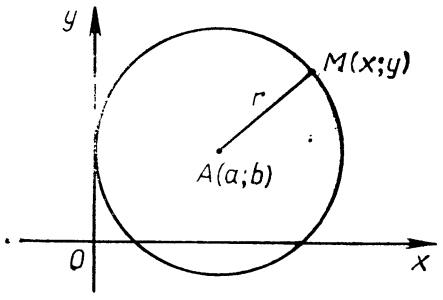


Рис. 8

4. Уравнение окружности. Возьмем окружность Γ с цент-

ром $A(a, b)$ и радиусом r (рис. 8) Для любой точки $M(x, y)$ этой окружности имеем $|AM| = r$, или, что то же самое, $|AM|^2 = r^2$. Но по формуле (5) имеем $|AM|^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$. Значит, для всех точек $M(x, y)$, лежащих на окружности Γ, должно выполняться равенство

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \qquad (12)$$

В то же время, если какая-нибудь точка $N(x, y)$ не лежит на данной окружности, то для нее $|AN|^2 \neq r^2$, а потому равенство (12) не имеет места.

Таким образом, окружность является множеством точек $M(x, y)$ координатной плоскости, для которых имеет место равенство (12). Поэтому указанное равенство является *уравнением окружности* Γ, а окружность — *графиком уравнения* (12).

Если раскрыть в уравнении (12) скобки и перенести r^2 в левую часть уравнения с обратным знаком, получим уравнение

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \qquad (13)$$

где $c = a^2 + b^2 - r^2$.

Обратно, пусть дано любое уравнение вида (13). Выделяя полные квадраты, получаем уравнение

$$(x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 - 2by + b^2) = a^2 + b^2 - c,$$

т. е.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Если $a^2 + b^2 - c > 0$, то существует единственное положительное число r, такое, что $a^2 + b^2 - c = r^2$. В этом случае уравнение (13) задает окружность с центром $A(a, b)$ и радиусом r.

Если $a^2 + b^2 - c = 0$, то получаем, что $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$. Этому уравнению удовлетворяет единственная точка $A(a, b)$ (так сказать, окружность «нулевого» радиуса с центром A).

Наконец, если $a^2 + b^2 - c < 0$, то на координатной плоскости нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы уравнению (13). В этом случае уравнение (13) задает пустое множество.

В уравнение окружности (13) входят числа a, b, r, характеризующие положение центра этой окружности и длину ее радиуса. Эти числа называют *параметрами* окружности. Говорят, что множество всех окружностей на плоскости трехпараметрическое.

Если зафиксировать два параметра и менять третий параметр, получится бесконечное семейство окружностей, зависящее от одного параметра. Например, если менять радиус r, получается семейство концентрических окружностей (рис. 9). При изменении параметра a получается семейство окружностей радиуса r, центры которых лежат на прямой, параллельной оси абсцисс (рис. 10).

Упражнения

27. Запишите уравнение окружности с центром $C(1, 1)$, проходящей через начало координат.

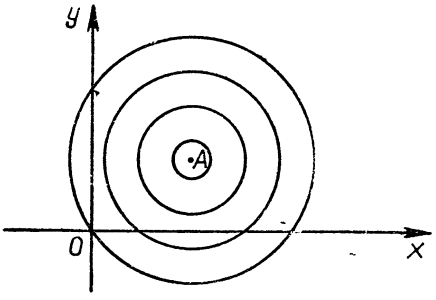


Рис. 9

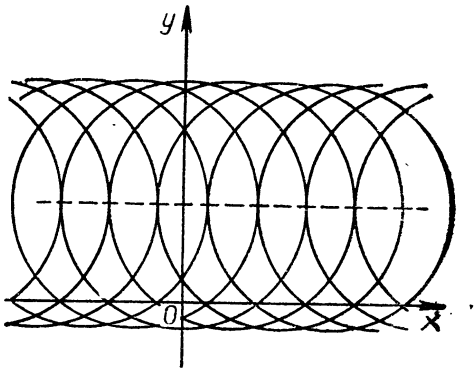


Рис. 10

28. Выясните, какие множества задают уравнения:

а) $x^2 + 2x + y^2 = 0$;
б) $x^2 + 2x + y^2 = 3$;
в) $x^2 + 2x + y^2 + 1 = 0$;
г) $x^2 + 2x + y^2 + 3 = 0$.

29. Нарисуйте семейства окружностей:

а) $(x - a)^2 + y^2 = a^2$;
б) $x^2 + (y - a)^2 = a^2$;
в) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 2a^2$.

30. Задайте семейство всех окружностей, проходящих через точки A (—1, 0) и B (1, 0), одним уравнением, зависящим от параметра a, в качестве которого возьмите ординату центра C.

31. а) Докажите, что график функции $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ есть полуокружность (часть окружности, лежащая по одну сторону от какого-то из своих диаметров).

б) Докажите, что график функции $y = \sqrt{q + px - x^2}$ при $p^2 + 4q > 0$ является полуокружностью.

32. Найдите уравнение окружности, описанной вокруг треугольника, вершины которого имеют координаты:

а) A (7, 7), B (0, 8), C (—2, 4);
б) A (0, 4), B (1, 2), C (3, —2).

33. Найдите уравнение окружности, которая касается обеих осей координат и проходит через точку A (2, 9).

34. Докажите, что множество точек, сумма квадратов расстояний которых до точек A ($-a$, 0) и B (a, 0), является окружностью.

35. Докажите, что множество точек, отношение расстояний которых до точек A ($-a$, 0) и B (a, 0) равно $\lambda \neq 1$, является окружностью (эту окружность называют *окружностью Аполлония*

для точек A *и* B по имени древнегреческого математика, впервые доказавшего соответствующую теорему). Какой вид имеет это множество при $\lambda = 1$?

36. Выразите через a и λ радиус окружности Аполлония, абсциссу ее центра, а также координаты точек, в которых она пересекает ось абсцисс.

37. Постройте семейство окружностей Аполлония для точек $A\ (-a,\ 0)$, $B\ (a,\ 0)$ при различных значениях λ. Что происходит с окружностями Аполлония, когда λ приближается к 1?

38. Покажите, что при заданных точках A и B окружности Аполлония попарно не пересекаются, а их центры лежат вне отрезка AB.

39. Исследуйте, во что превращается окружность Аполлония, когда λ приближается к нулю и когда λ стремится к бесконечности.

40. а) С помощью метода координат докажите, что при достаточно большом значении d множество точек

$$\{M/|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = d^2\},$$

где A, B, C — данные точки, есть окружность. (В этой задаче систему координат можно выбрать произвольно.)

б)* Меняя значение d из предыдущей задачи, по заданным координатам точек A, B, C — вершин треугольника ABC — найдите координаты точки D, сумма квадратов расстояний от которой до точек A, B, C минимальна.

в) Докажите, что точка D из задания б) является точкой пересечения медиан треугольника ABC.

5. Эллипс, гипербола и парабола. Из астрономии известно, что планеты движутся по кривым, называемым эллипсами, которые похожи на вытянутые окружности (рис. 11, *а*). Кометы же могут двигаться как по очень вытянутым в длину эллипсам, так и по параболам или гиперболам (рис. 11, *б*) (в двух последних случаях, появившись в окрестности Солнца, они уходят в межзвездное пространство и больше к Солнцу не возвращаются). То, что кометы могут двигаться по кривым трех различных видов, показывает, что три линии — эллипс, гипербола и парабола, — несмотря на внешнее различие, должны иметь какие-то общие свойства. Действительно, все три линии можно охарактеризовать одним и тем же геометрическим свойством.

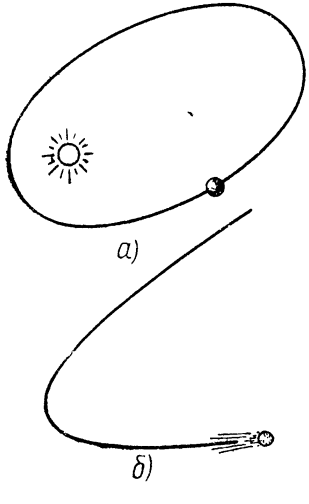


Рис. 11

Возьмем прямую линию l и точку F на расстоянии $p > 0$ от l (рис. 12). Найдем уравнение линии Γ, для всех точек которой отношение расстояний до точки F и до прямой l постоянно и равно ε.

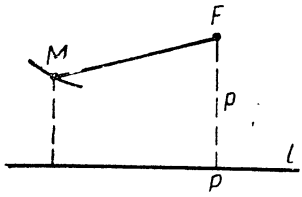


Рис. 12

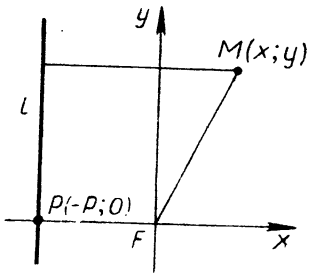


Рис. 13

Искомая линия имеет различную форму в зависимости от значения ε. Оказывается, если $0 < \varepsilon < 1$, то получается *эллипс*, если $\varepsilon = 1$, то *парабола*, а если $\varepsilon > 1$ — *гипербола*. Число ε называется *эксцентриситетом* линии Γ, точка F — ее *фокусом*, а l — *директрисой*.

Выберем в качестве оси абсцисс прямую FP, проходящую через точку F, перпендикулярную прямой l, а в качестве начала координат — точку F. Направление оси абсцисс выберем от P к F (рис. 13). Пусть $M(x, y)$ — какая-нибудь точка линии Γ. Ее расстояние до точки F равно $\sqrt{x^2 + y^2}$, а расстояние до прямой l равно $|p + x|$. По условию,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \varepsilon |p + x|.$$

Чтобы упростить полученное уравнение, возведем обе части в квадрат, учитывая, что $|a^2| = a^2$. После простых преобразований получаем следующее уравнение:

$$(1 - \varepsilon^2) x^2 - 2\varepsilon^2 px + y^2 = \varepsilon^2 p^2. \tag{14}$$

Если $\varepsilon = 1$, оно принимает вид $-2px + y^2 = p^2$, т. е.

$$y^2 = 2p\left(\frac{p}{2} + x\right). \tag{15}$$

Получаем уравнение параболы.

Если же $\varepsilon \neq 1$, то, разделив обе части уравнения (14) на $1 - \varepsilon^2$, выделим полный квадрат. После простых преобразований получаем уравнение

$$\left(x - \frac{\varepsilon^2 p}{1 - \varepsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^2 p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}.$$

Введем обозначения: $\dfrac{\varepsilon^2 p}{|1 - \varepsilon^2|} = c$, $\dfrac{\varepsilon p}{|1 - \varepsilon^2|} = a$, а $\dfrac{\varepsilon p}{\sqrt{|1 - \varepsilon^2|}} = b$. Так как при $0 < \varepsilon < 1$ $|1 - \varepsilon^2| = 1 - \varepsilon^2$, то уравнение запишется следующим образом:

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{16}$$

Это уравнение эллипса.

Если же $\varepsilon > 1$, то $|1 - \varepsilon^2| = -(1 - \varepsilon^2)$, и потому уравнение записывается так:

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (17)$$

Это уравнение гиперболы.

Позднее мы упростим эти уравнения и исследуем форму задаваемых ими линий.

Упражнения

41. Докажите, что для эллипса $a^2 = b^2 + c^2$, а для гиперболы $c^2 = a^2 + b^2$.

42. Через фокус эллипса проведена прямая, параллельная его директрисе. Выразите через ε и p длину отрезка, высекаемого на ней эллипсом.

43. Выразите p и ε для эллипса через a и b. Сделайте то же для гиперболы.

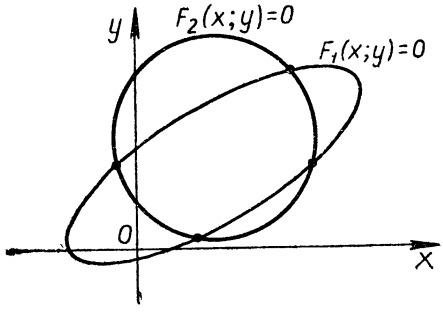


Рис. 14

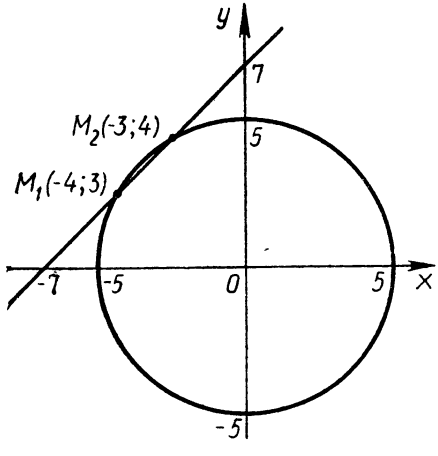


Рис. 15

44. Выразите для эллипса a и b через c и ε.

6. Пересечение графиков. Пусть линии Γ_1 и Γ_2 задаются своими уравнениями $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$ соответственно. Если точка $M(a, b)$ принадлежит пересечению этих линий, то ее координаты a и b удовлетворяют обоим уравнениям. Поэтому для отыскания точек пересечения этих линий (рис. 14) достаточно решить систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Пример. Найдем точки пересечения прямой $x - y + 7 = 0$ и окружности $x^2 + y^2 = 25$ (рис. 15).

Чтобы решить эту задачу, надо найти решения системы уравнений

$$\begin{cases} x - y + 7 = 0, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Подставляя в уравнение окружности значение x из уравнения

прямой, получаем квадратное уравнение $(y-7)^2+y^2=25$, или $2y^2-14y+24=0$, т. е. $y^2-7y+12=0$. Решая его, находим два корня $y_1=3$ и $y_2=4$. Им соответствуют значения $x_1=-4$ и $x_2=-3$. Значит, прямая и окружность имеют две точки пересечения $M_1(-4, 3)$ и $M_2(-3, 4)$.

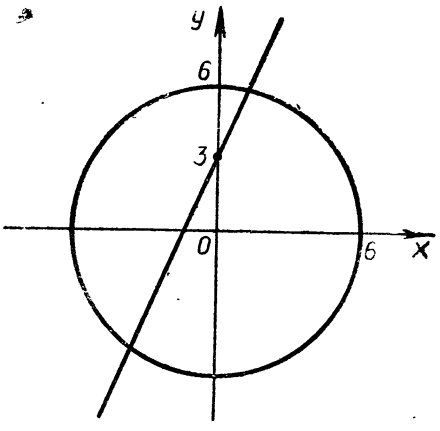


Рис. 16

Упражнения

45. Найдите точки пересечения линий, заданных своими уравнениями:

а) $x+y=9$ и $xy=14$;
б) $x^2+y^2=169$ и $x^2-y^2=119$;
в) $x^2+y^2=29$ и $xy=10$;
г) $x^2+y^2=25$ и $x-y=1$;
д) $x^2-3xy+2y^2=0$ и $x+4y=5$.

7. Объединение графиков. Чтобы изобразить график уравнения $(2x-y+3)(x^2+y^2-36)=0$, заметим, что произведение двух чисел равно нулю в том и только том случае, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому точка M может принадлежать графику данного уравнения лишь в том случае или только в том случае, когда ее координаты удовлетворяют хотя бы одному из уравнений $2x-y+3=0$ и $x^2+y^2-36=0$. Но в первом случае эта точка лежит на прямой, а во втором — на окружности. Значит, график данного уравнения является объединением прямой $2x-y+3=0$ и окружности $x^2+y^2-36=0$ (рис. 16).

Вообще, если уравнение имеет вид $F_1(x, y)\cdot F_2(x, y)\ldots F_n(x, y)=0$ и функции F_k, где $1\leqslant k\leqslant n$, имеют значения при любых значениях x и y, то график этого уравнения является объединением графиков уравнений $F_1(x, y)=0, \ldots, F_n(x, y)=0$.

Пример. Напишем уравнение, которому удовлетворяли бы лишь точки окружности радиуса 3 с центром в точке $A(-2, 5)$ и сама точка A.

Уравнение окружности имеет вид $(x+2)^2+(y-5)^2=9$. А уравнение, которому удовлетворяет лишь точка A, можно выбрать в виде $(x+2)^2+(y-5)^2=0$. Поэтому одним из ответов будет уравнение

$$[(x+2)^2+(y-5)^2-9]\,[(x+2)^2+(y-5)^2]=0.$$

Упражнения

46. Начертите графики уравнений:

а) $x^2 - y^2 = 0$;
б) $xy = 0$;
в) $(x + y - 1)(x^2 + y^2 - 49) = 0$;
г) $(x^2 + y^2)[(x - 1)^2 + (y - 1)^2][(x + 4)^2 + (y - 5)^2] = 0$;
д) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$;
е) $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$;
ж) $x^2y^2 = 1$;
з) $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0$;
и) $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0$.

47. Найдите, при каком условии графиком линии

$$x^2 - y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

является совокупность двух прямых линий.

48. Напишите уравнение, графиком которого является граница квадрата с вершинами A (0, 0), B (0, 2), C (2, 2), D (2, 0).

8. Графики неравенств. Каждая линия Γ разбивает плоскость на несколько *связных* частей, т. е. таких частей, что любые две точки одной и той же части можно соединить ломаной, не пересекающей линию Γ, а ломаная, соединяющая точки различных частей, пересекает линию Γ. Например, прямая линия разбивает плоскость на две полуплоскости, окружность — на открытый круг и внешнюю область и т. д. Может случиться, конечно, что имеется лишь одна связная область, например, если Γ является отрезком.

Пусть линия Γ, имеющая уравнение $F(x, y) = 0$, разбивает плоскость на связные части $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$. Тогда в каждой из этих частей функция $F(x, y)$ имеет один и тот же знак. Мы опускаем строгое доказательство этого утверждения, поскольку оно требует сведений, выходящих за рамки курса математики восьмилетней школы.

Назовем *графиком неравенства* $F(x, y) > 0$ множество Ω точек $A(a, b)$, для которых верно числовое неравенство $F(a, b) > 0$. Чтобы найти график неравенства $F(x, y) > 0$, надо построить линию Γ, имеющую уравнение $F(x, y) = 0$, выбрать в каждой из частей $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$, на которые эта линия разбивает плоскость, по пробной точке $A_1, \ldots, A_n$ и найти знак функции $F(x, y)$ в этих точках. Тогда функция $F(x, y)$ будет иметь в части Ω_k тот же знак, что и в точке A_k. Объединяя части, в которых $F(x, y)$ положительна, получим искомый график.

Пример 1. Построить график неравенства

$$(x + y - 6)(x^2 + y^2 - 64) > 0. \qquad (18)$$

Сначала найдем график уравнения

$$(x + y - 6)(x^2 + y^2 - 64) = 0.$$

Так как левая часть этого уравнения является произведением двух функций, то его график распадается на две линии: прямую $x + y - 6 = 0$ и окружность $x^2 + y^2 = 64$. Эти линии делят плоскость на четыре области (рис. 17). Выберем в области Ω_1 точку

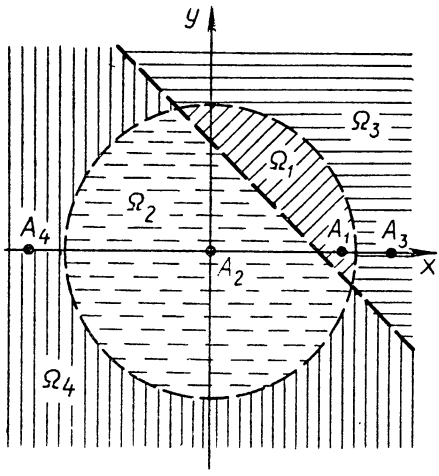


Рис. 17

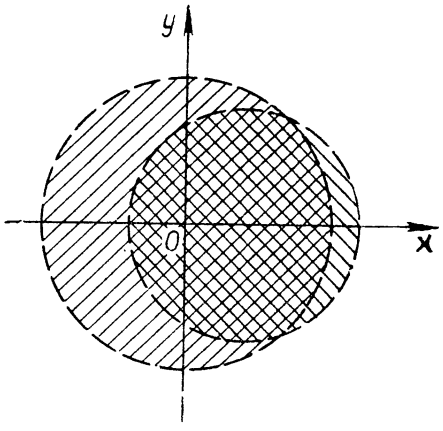


Рис. 18

A_1 (7, 0), в Ω_2 — точку A_2 (0, 0), в Ω_3 — точку A_3 (9, 0) и в Ω_4 — точку A_4 (—9, 0). Подставляя координаты этих точек в выражение $(x + y - 6)(x^2 + y^2 - 64)$, убеждаемся, что оно положительно в точках A_2 и A_3 и отрицательно в A_1 и A_4. Поэтому оно положительно в областях Ω_2 и Ω_3 и отрицательно в двух других областях. График на рисунке 17 состоит из Ω_2 и Ω_3 (поскольку неравенство строгое, точки прямой и окружности не принадлежат графику и потому показаны на рисунке штриховой линией; если заменить в неравенстве (18) знак $>$ на $\geqslant$, то к графику надо было бы присоединить точки указанных линий).

Объединяя и пересекая области, заданные неравенствами вида $F(x, y)$, можно получать разнообразные области.

Пример 2. Найти область, заданную системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 < 0, \\ (x - 2)^2 + y^2 - 16 < 0. \end{cases}$$

Каждое из неравенств этой системы задает открытый круг. У первого из них центр находится в точке O (0, 0), а радиус равен 5, а у второго центр находится в точке A (2, 0), а радиус равен 4. Точки, координаты которых удовлетворяют обоим неравенствам, принадлежат обоим кругам, т. е. их пересечению. Значит, система задает область, заштрихованную на рисунке 18 дважды.

Пример 3. Найти область, заданную условием

$$x^2 + y^2 - 25 < 0 \text{ или } (x - 2)^2 + y^2 - 16 < 0$$

(здесь союз «или» понимается в неразделительном смысле — координаты точек должны удовлетворять хотя бы одному из этих неравенств, но могут удовлетворять и обоим неравенствам сразу).

Из условия ясно, что искомая область является объединением кругов, построенных в примере 2 (рис. 18).

Упражнения

49. Начертите области, заданные неравенствами:

а) $y \geqslant 4x - 6$;
б) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 \leqslant 25$;
в) $y \leqslant x^2 + 1$;
г) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 > 25$.

50. Найдите $A \cap B$ и $A \cup B$, если

а) $A = \{M(x, y) | y < 9 - x^2\}$,
$B = \{M(x, y) | y \geqslant x^2\}$;
б) $A = \{M(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 25\}$,
$B = \{M(x, y) | x + y \geqslant -1\}$;
в) $A = \{M(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 25\}$,
$B = \{M(x, y) | y > x^2\}$;
г) $A = \{M(x, y) | y = \frac{1}{2}x^2\}$,
$B = \{M(x, y) | y \geqslant \frac{3}{2}x - 1\}$;
д) $A = \{M(x, y) | x^2 + y^2 - 2x + 4y - 29 \leqslant 0\}$,
$B = \{M(x, y) | 2x + y = 1\}$;
е) $A = \{M(x, y) | x^2 + y^2 \geqslant 25\}$,
$B = \{M(x, y) | y = \frac{4}{9}x^2\}$.

ГРАФИКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Координатная запись геометрических преобразований. Напомним, что *геометрическим преобразованием* называется любое взаимно-однозначное отображение плоскости на себя. Пусть на плоскости выбрана система координат и f — некоторое геометрическое преобразование. Тогда координаты (x', y') точки $N = f(M)$ являются функциями координат (x, y) точки M

$$\begin{cases} x' = \varphi(x, y), \\ y' = \psi(x, y). \end{cases} \tag{1}$$

Задание функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ полностью определяет преобразование f.

Пример 1. Пусть f — параллельный перенос, при котором начало координат $O(0, 0)$ отображается на точку $A(a, b)$. Найдем координаты образа $N(x', y')$ точки $M(x, y)$ при этом переносе. Спроектируем точки A, M и N на ось абсцисс (рис. 19). Так как отрезки OA и MN параллельны и имеют одинаковую длину, то величины направленных отрезков OA' и $M'N'$ одинаковы, $|OA'| = |M'N'|$. Очевидно, что

$$|ON'| = |OM'| + |M'N'| = |OM'| + |OA'|.$$

Так как $|ON'| = x'$, $|OM'| = x$, $|OA'| = a$, то получаем, что $x' = x + a$. Точно так же доказывается равенство $y' = y + b$. Значит, данный параллельный перенос записывается в координатной форме так:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases} \qquad (2)$$

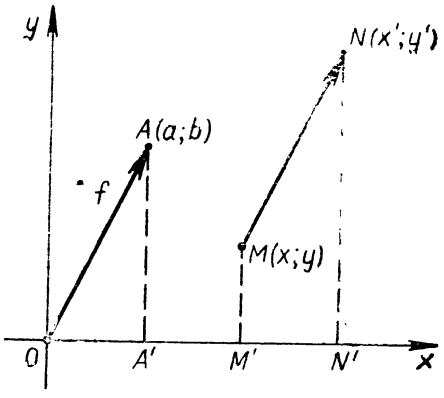


Рис. 19

Пример 2. Пусть f — осевая симметрия относительно оси абсцисс. Из рисунка 20 видно, что при этом преобразовании образом точки M (x, y) оказывается точка M' $(x, -y)$. Значит, координатная запись этого преобразования такова:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases} \qquad (3)$$

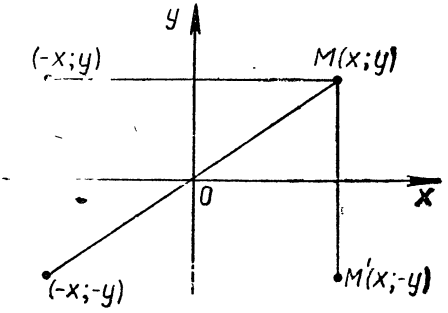


Рис. 20

Точно так же убеждаемся, что осевая симметрия относительно оси ординат задается формулами

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y, \end{cases}$$

а центральная симметрия относительно начала координат — формулами

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases} \qquad (5)$$

Пример 3. При симметрии относительно прямой $y = x$, делящей пополам 1-й и 3-й координатные углы, оси координат меняются местами. Отсюда ясно, что при таком преобразовании образом точки M (x, y) окажется точка N (y, x). Поэтому это преобразование задается формулами

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases} \qquad (6)$$

Точно так же убеждаемся, что при симметрии относительно прямой $y = -x$, делящей пополам 2-й и 4-й координатные углы, образом точки M (x, y) оказывается точка N_1 $(-y, -x)$, т. е. это преобразование задается формулами:

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = -x. \end{cases} \qquad (7)$$

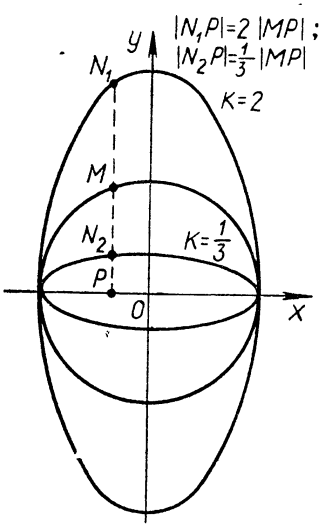


Рис. 21

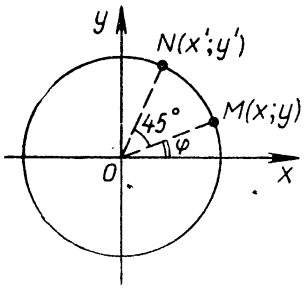


Рис. 22

Пример 4. Назовем *растяжением от прямой* l с коэффициентом $k > 0$ геометрическое преобразование, при котором точки этой прямой отображаются на себя, а каждая точка M, не лежащая на l, отображается на такую точку N, что $(MN) \perp l$, причем $|NP| = k|MP|$, где P — точка пересечения прямых MN и l. Из этого определения следует, что при растяжении с коэффициентом k относительно оси абсцисс (рис. 21) точка $M(x, y)$ отображается на точку $N(x, ky)$, т. е. это растяжение задается формулами

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky. \end{cases} \tag{8}$$

Отметим, что если $0 < k < 1$, то точка N ближе к оси абсцисс, чем точка M, так что здесь было бы естественнее говорить не о растяжении, а о сжатии. Мы сохраняем термин «растяжение» для единства терминологии.

Точно так же доказывается, что растяжение с коэффициентом $k > 0$ относительно оси ординат задается формулами

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = y. \end{cases} \tag{8'}$$

Пример 5. Если сделать сначала растяжение относительно оси абсцисс с коэффициентом k, а потом растяжение относительно оси ординат с тем же коэффициентом, получим преобразование, задаваемое формулами

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = ky. \end{cases} \tag{9}$$

Оно является гомотетией с коэффициентом k относительно начала координат.

Пример 6. Рассмотрим поворот на 90° против часовой стрелки вокруг начала координат. Пусть при этом повороте точка $M(x, y)$ отображается на точку $N(x', y')$. Легко показать, что

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases} \tag{10}$$

Эти формулы являются частным случаем формул

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{cases} \tag{11}$$

задающих поворот на угол φ вокруг начала координат (угол отсчитывается против часовой стрелки). Например, поворот на 45° вокруг начала координат (рис. 22) задается формулами

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,y, \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,y. \end{cases}$$

Пример 7. Преобразованием *инверсии* относительно окружности Γ, имеющей радиус r и центр O, называется геометрическое преобразование «проколотой» плоскости (т. е. плоскости с выброшенной точкой O), при котором каждая точка M отображается на такую точку N, что N лежит на луче OM, причем $|OM| \cdot |ON| = r^2$.

Выберем систему координат, начало которой находится в O. Так как точки O (0, 0), M (x, y) и N (x', y') (рис. 23) лежат на одном луче, то $x' = kx$, $y' = ky$, где $k > 0$. Чтобы найти значение k, заметим, что $|OM|^2 = x^2 + y^2$, $|ON|^2 = (x')^2 + (y')^2 = k^2 (x^2 + y^2)$. Но $|OM|^2 \cdot |ON|^2 = r^4$, и потому $k^2 (x^2 + y^2)^2 = r^4$. Так как $k > 0$, то $k = \dfrac{r^2}{x^2 + y^2}$.

Значит, $x' = kx = \dfrac{r^2 x}{x^2 + y^2}$, $y' = ky = \dfrac{r^2 y}{x^2 + y^2}$.

Мы доказали, что преобразование инверсии относительно окружности радиуса r с центром в начале координат задается формулами

$$\begin{cases} x' = \dfrac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \\ y' = \dfrac{r^2 y}{x^2 + y^2}. \end{cases} \qquad (12)$$

Например, если $r = 2$, то точка M (3; 4) отображается в точку N (0,48; 0,64). В самом деле,

$$x' = \frac{2^2 \cdot 3}{3^2 + 4^2} = \frac{12}{25} = 0{,}48,$$

$$y' = \frac{2^2 \cdot 4}{3^2 + 4^2} = \frac{16}{25} = 0{,}64.$$

Упражнения

51. Докажите, что преобразованием, обратным инверсии, является та же самая инверсия.

52. Рассматривается поворот на 90° вокруг начала координат, после него выполняется гомотетия относительно начала координат с коэффициентом 4 и параллельный перенос, при котором начало

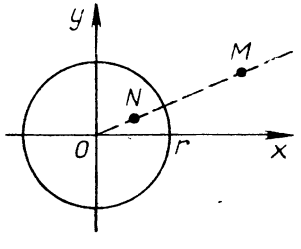


Рис. 23

координат отображается на точку O_1 (3; —4). Найдите координаты образов точек A (5; —2) и B (0; 8) при последовательном выполнении этих преобразований. Найдите образ отрезка AB.

53. Формулы

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2, \\ y' = 2xy \end{cases}$$

задают отображение верхней полуплоскости на плоскость, разрезанную вдоль положительного луча оси абсцисс. Напишите формулы для обратного отображения.

54. Отображения f и g задаются формулами

$$f: \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y; \end{cases} \qquad g: \begin{cases} x' = x^3 - y^3, \\ y' = 3xy^2 - 3x^2y. \end{cases}$$

Запишите формулы, определяющие отображения $f \circ g$ и $g \circ f$. Перестановочны ли отображения f и g, т. е. совпадают ли отображения $f \circ g$ и $g \circ f$?

2*. Уравнение образа линии. При геометрическом преобразовании f каждое множество Γ точек плоскости отображается в множество $\Gamma' = f(\Gamma)$, состоящее из образов точек множества Γ. Множество Γ' называют *образом* Γ при преобразовании f, а Γ — *прообразом* множества Γ' при этом преобразовании. Если множество Γ является графиком уравнения $F(x, y) = 0$, а преобразование f задано в координатной форме, то можно написать уравнение образа Γ' множества Γ.

Прежде чем объяснять, как это делается в общем случае, разберем следующий пример. Пусть преобразование f задается формулами

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y, \\ y' = x + 2y. \end{cases} \tag{13}$$

Найдем образ линии Γ ($x^2 + 3y^2 = 1$) при этом преобразовании. Для этого возьмем какую-нибудь точку M' (x', y'), расположенную на линии $\Gamma' = f(\Gamma)$. Так как $M' \in f(\Gamma)$, то найдется точка M (x, y) на линии Γ, такая, что $M' = f(M)$. Чтобы узнать координаты этой точки, надо решить систему уравнений (13) относительно x и y. Решая эту систему, находим, что

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7}x' + \frac{3}{7}y', \\ y = -\frac{1}{7}x' + \frac{2}{7}y'. \end{cases} \tag{14}$$

Но точка M (x, y) принадлежит линии Γ, и потому ее координаты удовлетворяют уравнению этой линии. Это значит, что координаты (x', y') точки M' удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{2}{7}x' + \frac{3}{7}y'\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{7}x' + \frac{2}{7}y'\right)^2 = 1, \tag{15}$$

которое получается при замене в уравнении линии Γ координат x и y их выражениями через x' и y'.

Мы доказали, таким образом, что координаты (x', y') любой точки линии Γ' удовлетворяют уравнению (15). При этом ясно, что любая точка $M'(x', y')$, координаты которой удовлетворяют уравнению (15), принадлежит Γ'. Иными словами, Γ' является графиком уравнения (15). Обычно в таком уравнении вновь заменяют x' и y' буквами x и y, т. е. пишут его в виде:

$$\left(\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y\right)^2 = 1. \qquad (15')$$

Разобранный пример показывает, что уравнение линии $\Gamma' = f(\Gamma)$ получается следующим образом:

1) уравнения, дающие координатную запись преобразования f, решают относительно x и y (т. е. находят координатную запись преобразования f^{-1}, обратного f);

2) полученные выражения для x и y подставляют в уравнение линии Γ;

3) в полученном уравнении заменяют x' и y' буквами x и y.

Применим этот общий метод к преобразованиям, разобранным в п. 1.

Пример 1. Пусть $\vec{a}$ — параллельный перенос, отображающий начало координат O на точку $A(a, b)$. Решая относительно x и y систему уравнений (2) п. 1, получаем, что $x = x' - a, y = y' - b$. Значит, если линия Γ имеет уравнение $F(x, y) = 0$, то ее образ Γ' имеет уравнение $F(x - a, y - b) = 0$.

Например, окружность $x^2 + y^2 = r^2$ с центром в начале координат отображается при таком преобразовании на окружность $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ того же радиуса r с центром в точке $A(a, b)$.

Пример 2. Точно так же убеждаемся, что при симметрии относительно оси абсцисс линия Γ, имеющая уравнение $F(x, y) = 0$, отображается на линию Γ', задаваемую уравнением $F(x, -y) = 0$; при симметрии относительно оси ординат та же линия Γ отображается на линию Γ'', задаваемую уравнением $F(-x, y) = 0$, а при симметрии относительно начала координат она отображается на линию Γ''', уравнение которой имеет вид $F(-x, -y) = 0$.

Пример 3. Из формул (6) и (7) п. 1 следует, что при симметрии относительно прямой $y = x$ линия Γ, имеющая уравнение $F(x, y) = 0$, отображается на линию Γ' с уравнением $F(y, x) = 0$. При симметрии же относительно прямой $y = -x$ она отображается на линию Γ'' с уравнением $F(-y, -x) = 0$.

Пример 4. Решим относительно x и y уравнения (8) п. 1: $x = x'$, $y = \frac{1}{k}y'$. Отсюда следует, что при растяжении с коэффициентом k от оси абсцисс линия Γ с уравнением $F(x, y) = 0$ отображается на линию Γ' с уравнением $F\left(x, \frac{y}{k}\right) = 0$. При растяжении с тем

же коэффициентом k от оси ординат линия Γ отображается на линию Γ'', имеющую уравнение $F\left(\frac{x}{k}, y\right) = 0$.

Например, окружность $x^2 + y^2 = a^2$ отображается при растяжении от оси абсцисс на линию, имеющую уравнение $x^2 + \frac{y^2}{k^2} = a^2$.

Пример 5. При гомотетии с коэффициентом k относительно начала координат линия Γ, имеющая уравнение $F(x, y) = 0$, отображается на линию Γ' с уравнением $F\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) = 0$.

Пример 6. Решим относительно x и y уравнения, задающие поворот на 45° относительно начала координат (п. 1):

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'), \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y'). \end{cases}$$

Отсюда следует, что при повороте против часовой стрелки на 45° вокруг начала координат линия Γ, имеющая уравнение $F(x, y) = 0$, отображается на линию Γ' с уравнением

$$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y)\right) = 0.$$

Например, график обратной пропорциональности $xy = k$ отображается при этом повороте на линию, имеющую уравнение

$$\frac{1}{2}(x + y)(-x + y) = k \text{ или } y^2 - x^2 = 2k.$$

Пример 7. Преобразование инверсии, как и преобразование симметрии, обладает тем свойством, что оно само себе обратно. Поэтому выражения x и y через x' и y' имеют вид, аналогичный формулам (12) п. 1:

$$\begin{cases} x = \dfrac{r^2 x'}{(x')^2 + (y')^2}, \\ y = \dfrac{r^2 y'}{(x')^2 + (y')^2}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при этом преобразовании (называемом также симметрией относительно окружности) линия Γ, имеющая уравнение $F(x, y) = 0$, отображается на линию Γ' с уравнением

$$F\left(\frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}\right) = 0.$$

Упражнения

55. Докажите, что при инверсии:

а) прямая, проходящая через центр инверсии, отображается на себя;

б) прямая, не проходящая через центр инверсии, отображается на окружность, проходящую через центр инверсии;

в) окружность, проходящая через центр инверсии, отображается на прямую, не проходящую через центр инверсии;

г) окружность, не проходящая через центр инверсии, отображается на окружность, не проходящую через центр инверсии.

56. Найдите образ отрезка $[1, 4]$ оси абсцисс при инверсии относительно окружности $x^2 + y^2 = 1$.

57. Найдите образ дуги гиперболы $xy = 1$, $1 \leqslant x \leqslant 2$ при отображении

$$\begin{cases} x' = x^3 + y^3, \\ y' = x^3 - y^3. \end{cases}$$

58. Найдите образ дуги параболы $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 4$ при отображении

$$\begin{cases} x' = x^3 + y, \\ y' = x^3 - y. \end{cases}$$

59. Последовательно выполняются симметрии относительно прямой $y = x$ и оси ординат. Найдите образ прямой $Ax + By + C = 0$ при этом отображении.

60. На основе решения задачи 59 выведите условие перпендикулярности прямых $A_1x + B_1y + C = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

61. Из точки A $(9, -4)$ опустите перпендикуляр на прямую $6x - 2y + 5 = 0$.

3. Исследование симметрии линий по их уравнениям. Знание уравнения линии Γ позволяет во многих случаях делать выводы о ее геометрических свойствах, опираясь лишь на исследование уравнения. Покажем, как таким путем исследуется симметричность графика уравнения $F(x, y) = 0$ относительно осей координат, биссектрис координатных углов и начала координат.

Пусть $F(x, y) = F(x, -y)$. Так как при симметрии относительно оси абсцисс график уравнения $F(x, y) = 0$ отображается на график уравнения $F(x, -y) = 0$, то, в силу равенства $F(x, y) = F(x, -y)$, он отображается сам на себя, т. е. симметричен относительно оси абсцисс. В частности, симметрична относительно оси абсцисс любая линия, в уравнение которой y входит лишь в четных степенях, например линия с уравнением $y^6 + 3xy^4 - 3x^3y^2 - 8x^4 = 0$. Симметрична относительно оси абсцисс и линия, уравнение которой имеет вид $F(x, |y|) = 0$. В самом деле, $F(x, |y|) = F(x, |-y|)$.

Точно так же, если $F(x, y) = F(-x, y)$, то график уравнения $F(x, y) = 0$ симметричен относительно оси ординат, а если $F(x, y) = F(-x, -y)$, то этот график симметричен относительно начала координат.

Далее, если $F(x, y) = F(y, x)$, то график уравнения симметричен относительно прямой $y = x$, а если $F(x, y) = F(-y, -x)$, то он симметричен относительно прямой $y = -x$.

Пример 1. Линия, задаваемая уравнением

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2) - 6x^2y^2,$$

имеет четыре оси симметрии: оси абсцисс и ординат и прямые $y = x$ и $y = -x$. В самом деле, в данном случае $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2 (x^2 + y^2) + 6x^2y^2$. Так как x и y входят в $F(x, y)$ лишь в четных степенях, то линия Γ симметрична относительно обеих осей координат. А так как $F(x, y)$ не меняется при перестановке x и y, то и прямая $y = x$ является осью симметрии для Γ. Проверку симметричности Γ относительно прямой $y = -x$ предоставляем читателю.

Пример 2. График уравнения

$$|x| + |y| = 6 \qquad (16)$$

тоже имеет четыре оси симметрии, поскольку $F(x, y)$ зависит лишь от $|x|$ и $|y|$ и не меняется при перестановке x и y.

Если установлена симметричность графика уравнения $F(x, y) = 0$ относительно некоторой оси или точки, то достаточно построить часть графика, а остальную достроить, пользуясь симметрией. Например, чтобы построить график уравнения (16), возьмем сначала его часть, расположенную в первом координатном угле, т. е. в области, где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. В этой области $|x| = x$, $|y| = y$, и потому уравнение (16) принимает вид $x + y = 6$. Это уравнение прямой линии (рис. 24). При этом, разумеется, берется только часть прямой, расположенная в области, где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Далее, отображаем полученный отрезок относительно оси ординат, а полученную ломаную — оси абсцисс. Получается квадрат, диагонали которого лежат на осях координат (рис. 25).

Упражнения

62. Исследуйте на симметрию графики следующих уравнений и неравенств:

а) $x^4 + y^4 = 1$;
б) $x^4 + 3y^4 \leqslant 5$;
в) $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 8$;
г) $x^3 + y^3 \geqslant 27$;
д) $x^3 - y^3 = 8$;
е) $|x| + 2|y| \leqslant 1$;
ж) $x^3 + y^3 - 3xy = 1$;
з) $x^3 - y^3 + 3xy = 0$.

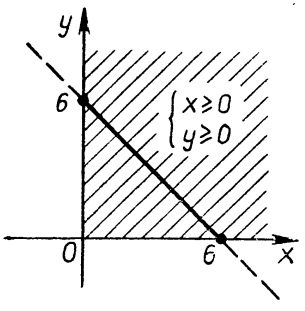


Рис. 24

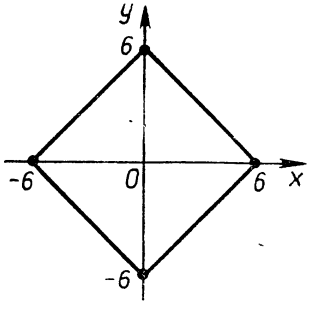


Рис. 25

63. Докажите, что множества $A \cap B$ и $A \cup B$, где $A = \{M(x, y) \mid x^4 + 2y^2 \leqslant 1\}$, $B = \{M(x, y) \mid x^2 + 6y^4 \leqslant 10\}$, симметричны относительно осей координат.

4. Упрощение и исследование уравнений эллипса, гиперболы и параболы. Ранее мы получили уравнения эллипса, гиперболы и параболы. Эти уравнения можно записать в более простом виде, выбрав начало координат в иной точке.

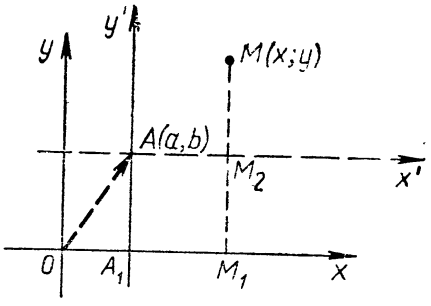


Рис. 26

Вывод формул, выражающих новые координаты точки через старые при переходе к новой системе координат, очень похож на вывод формул для координат образа точки при геометрическом преобразовании. Однако следует иметь в виду различие этих ситуаций: раньше у нас координатная система была неподвижной, а точка меняла свое положение, теперь же точка остается неподвижной, но меняет свое положение система координат.

Пусть сделан параллельный перенос системы координат, при котором начало координат отобразилось на точку $A(a, b)$. Найдем новые координаты (x', y') точки $M(x, y)$. Из рисунка 26 видно, что $x' = |AM_2| = |A_1M_1| = |OM_1| - |OA_1| = x - a$, т. е. $x' = x - a$. Так же устанавливается, что $y' = y - b$.

Итак, при переносе начала координат в точку $A(a, b)$ (с сохранением направления осей и единицы измерения длин) точка $M(x, y)$ получает новые координаты x' и y', выражаемые формулами

$$\begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases} \qquad (17)$$

Воспользуемся формулами (17) для упрощения уравнения параболы. Перенесем начало координат в точку $A\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$. Тогда получим, что $x' = x + \frac{p}{2}$, $y' = y$, и потому уравнение (15) (с. 139) примет вид $(y')^2 = 2px'$. Заменяя x' и y' буквами x и y, получим уравнение параболы в виде

$$y^2 = 2px. \qquad (18)$$

Для эллипса перенесем начало координат в точку $B(c, 0)$. Тогда уравнение (16) (с. 139) примет вид $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$, или, после замены x' и y' буквами x и y, вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (19)$$

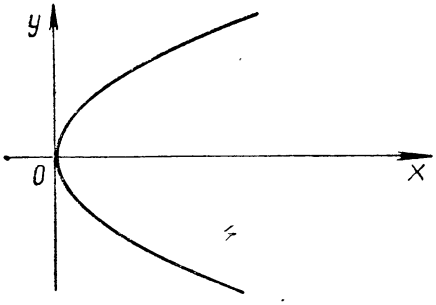


Рис. 27

Наконец, для гиперболы после переноса начала координат в точку D $(-c, 0)$ получаем уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (20)$$

Перейдем теперь к исследованию формы этих трех линий. Так как $(-y)^2 - 2px = y^2 - 2px$, то парабола симметрична относительно оси абсцисс. При этом она проходит через начало координат, так как $0^2 = 2p \cdot 0$, и расположена справа от оси ординат, так как $x = \frac{y^2}{2p} \geqslant 0$. При увеличении x увеличиваются и значения y, т. е. значения $|y|$, а потому точки параболы удаляются от оси абсцисс при движении слева направо (рис. 27).

Отметим, что при симметрии относительно прямой $y = x$ парабола $y^2 = 2px$ переходит в кривую $x^2 = 2py$, т. е. в известный из школьного курса математики график квадратичной функции $y = \frac{x^2}{2p}$. Теперь понятно, почему кривая при $\varepsilon = 1$ была названа параболой.

Перейдем теперь к изучению формы эллипса. Из уравнения (19) видно, что эллипс симметричен относительно обеих осей координат. Кроме того, из этого уравнения вытекает, что $\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1$ и $\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, а потому $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$. Это показывает, что эллипс расположен внутри прямоугольника с центром в начале координат и со сторонами длины $2a$ и $2b$, параллельными осям координат. Так как $|y| = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, то при увеличении x от нуля до a значения $|y|$ убывают от $|b|$ до нуля. Поэтому эллипс имеет вид, изображенный на рисунке 28.

Эллипс пересекает свои оси симметрии в точках A_1, A_2, B_1, B_2, называемых его *вершинами*. Отрезок A_1A_2 называют *большой осью* эллипса, а отрезок B_1B_2 — его *малой осью* (так как $a^2 = b^2 + c^2$, то $a > b$). Можно доказать, что длина любого *диаметра* эллипса (отрезка, соединяющего точки, симметричные относительно его центра O) заключена между b и a, т. е. между длинами малой и большой осей эллипса.

Отметим, что в силу симметричности эллипса он имеет кроме фокуса и директрисы, входящих в его определение, симметричные им относительно оси ординат фокус и директрису. Так как обе директрисы параллельны оси ординат, то они параллельны друг другу. При этом (рис. 29) выполняются равенства $r_1 = |F_1A| = p_1\varepsilon$,

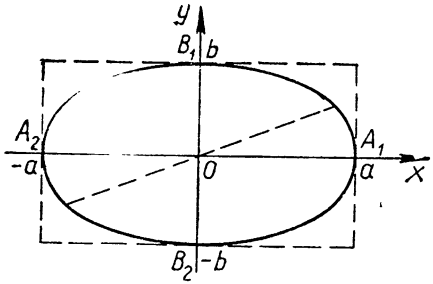


Рис. 28

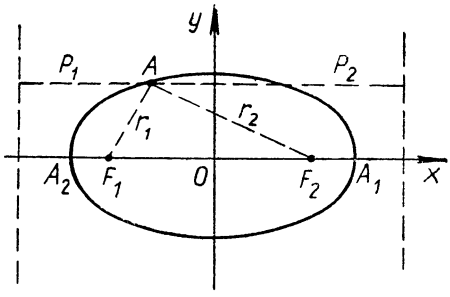


Рис. 29

$r_2 = |F_2A| = p_2\varepsilon$, и потому для всех точек эллипса выполняется равенство $r_1 + r_2 = p_1\varepsilon + p_2\,\varepsilon = (p_1 + p_2)\,\varepsilon$.

Заметим, что $p_1 + p_2$, а тем самым и $r_1 + r_2$ постоянно. Но для точки A_1 имеем

$$r_1 + r_2 = |A_1F_1| + |A_1F_2| = |A_1F_2| + |F_2A_2| = |A_1A_2| = 2a.$$

Следовательно, для всех точек эллипса сумма их расстояний от фокусов одна и та же и равна $2a$. Можно доказать, что этим свойством обладают лишь точки эллипса.

Частным случаем эллипса является окружность, для нее $a = b$, $c = 0$, оба фокуса сливаются в центре, директриса бесконечно удалена. Любой эллипс может быть получен из окружности с помощью преобразования растяжения от оси. Возьмем окружность $x^2 + y^2 = a^2$ и растянем ее от оси абсцисс с коэффициентом $\frac{b}{a}$ (так как $b' < a$, то окружность на самом деле сожмется к оси абсцисс). При этом получаем, что окружность отобразится на график уравнения $x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2$, т. е. в эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Рассмотрим теперь гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Поскольку в это уравнение координаты x и y входят лишь во второй степени, гипербола симметрична относительно обеих осей. Однако, в отличие от эллипса, она не является ограниченной линией. Из уравнения (20) следует, что $|y| = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

Отсюда видно, что при увеличении значений $|x|$ значения $|y|$ неограниченно возрастают. Кроме того, $|x| \geqslant a$, а потому гипербола не имеет точек, лежащих в полосе $-a < x < a$. Значит, она состоит из двух ветвей (рис. 30).

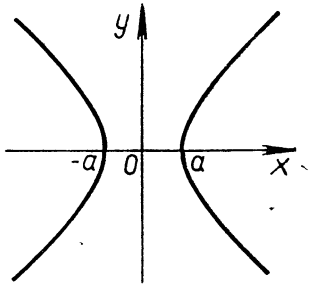


Рис. 30

В силу симметрии относительно оси ординат гипербола имеет два фокуса и две директрисы. Предоставляем читателю доказать, что для всех точек гиперболы

выполняется равенство $|r_1 - r_2| = 2a$, где r_1 и r_2 — расстояния от точки до фокусов.

Так же, как эллипс получается при растяжении от оси абсцисс окружности, гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ получается при растяжении от оси абсцисс с коэффициентом $k = \frac{a}{b}$ гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$. Такая гипербола, у которой $a = b$, называется *равнобочной*. Она получается при повороте на $-45°$ графика обратной пропорциональности $xy = \frac{a^2}{2}$.

Из школьного курса математики известно, что график функции $y = \frac{a^2}{2x}$ неограниченно приближается как к оси абсцисс, так и к оси ординат, никогда не сливаясь с этими прямыми. После поворота на $-45°$ оси координат отображаются на прямые $y = x$ и $y = -x$, а после растяжения от оси абсцисс с коэффициентом $\frac{b}{a}$ эти прямые отображаются на прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$. Отсюда следует, что гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ при увеличении $|x|$ неограниченно приближается к прямым $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$. Эти прямые называются *асимптотами* гиперболы.

Чтобы начертить гиперболу, поступают следующим образом. Изображают прямоугольник с центром в начале координат и сторонами $2a$ и $2b$, параллельными соответственно осям абсцисс и ординат. Продолжая диагонали этого прямоугольника, получают асимптоты гиперболы. А потом, начиная от точек $(a, 0)$ и $(-a, 0)$, ведут линии, приближающиеся к этим асимптотам (рис. 31).

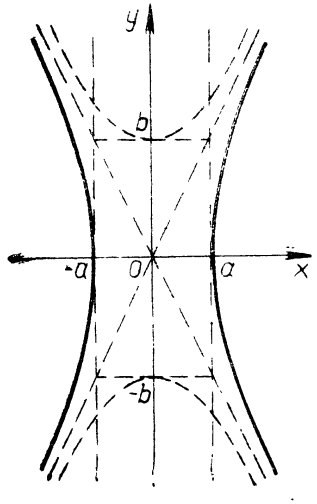


Рис. 31

Те же асимптоты имеет гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$. Но эта гипербола пересекает ось ординат и не пересекает ось абсцисс. Она изображена на рисунке 31 штриховой линией.

Упражнения

64. Составьте уравнение эллипса вида (19), зная, что

а) его полуоси соответственно равны 4 и 2;

б) расстояние между фокусами равно 6 и большая полуось равна 5;

в) большая полуось равна 10 и эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}8$;

г) сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами тоже равно 8.

65. Начертите семейство эллипсов с одинаковой длиной большой оси $2a$. Проследите, как меняются положения фокусов и директрисы, когда b изменяется от a до нуля.

66. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по сторонам прямого угла. Докажите, что каждая точка отрезка описывает при этом четверть эллипса.

67. Составьте уравнение гиперболы вида (20), если

а) расстояние между ее вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10;

б) расстояние между вершинами равно 6, причем гипербола проходит через точку A (9, —4).

68. Постройте эскиз гипербол $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ и $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$.

69. Выделяя полный квадрат, упростите следующие уравнения и постройте соответствующие линии:

а) $x^2 + 4y^2 + 6x - 8y = 0$;

б) $9x^2 + 16y^2 + 18x + 32y - 119 = 0$;

в) $x^2 - y^2 + 8x - 6y = 0$;

г) $x^2 - 10y + 6y = 5$.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

1. Исследование функций и построение графиков. Ограничимся теперь случаем, когда уравнение, задающее линию Γ, имеет вид $y = f(x)$, т. е. когда Γ является графиком некоторой функции. Чтобы построить такой график, необходимо предварительно исследовать данную функцию, а именно установить, при каких значениях x определена эта функция, симметричен ли график относительно оси ординат или начала координат, в каких точках функция обращается в нуль, а в каких она обращается в бесконечность, наконец, выяснить, как она себя ведет на бесконечности, т. е. при стремлении аргумента к бесконечности. Такой анализ позволяет определить участки, на которых знак функции постоянен, наметить поведение функции и сделать грубый эскиз ее графика. Для более точного построения следовало бы еще изучить, где функция возрастает, а где она убывает, найти точки, где она принимает максимальные и минимальные значения, исследовать ее график на выпуклость и вогнутость. Но эти исследования обычно проводятся с привлечением средств дифференциального исчисления, и мы не будем ими заниматься.

Остановимся подробнее на указанных выше этапах изучения функции.

а) Нахождение области определения функции. Начнем с отыскания области, где существует выражение, задающее функцию. Если это выражение является алгебраической дробью или иррационально, достаточно найти точки, где ни один

знаменатель не обращается в нуль (деление на нуль невозможно!), и участки, на которых подкоренные выражения неотрицательны.

Например, функция $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}$ существует при всех значениях x, кроме значений 1 и 3 (корни уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$), а функция $y = \sqrt{x^2 - 16}$ при $|x| \geqslant 4$.

б) Исследование графика на симметрию. Как мы установили, график функции $y = f(x)$ симметричен относительно оси ординат в том и только том случае, когда для любого x, при котором функция f определена, выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. В этом случае функцию называют *четной*, поскольку типичным примером таких функций являются $y = x^2$, $y = x^4$ и вообще $y = x^{2n}$.

Если для всех x, при которых функция f определена, выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, то график этой функции симметричен относительно начала координат. В этом случае функцию называют *нечетной*. Типичным примером нечетных функций могут служить функции $y = x$, $y = x^3$ и вообще $y = x^{2n-1}$.

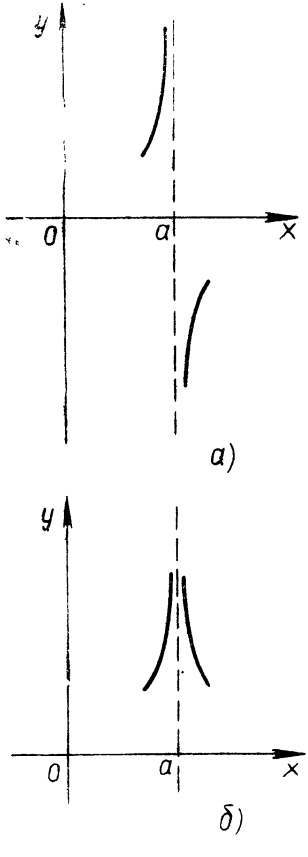


Рис. 32

Если график функции симметричен, его достаточно построить на положительной полуоси и потом продолжить на отрицательную полуось по симметрии.

в) Нахождение нулей функции. Чтобы найти точки, где функция обращается в нуль, надо решить уравнение $f(x) = 0$. Если функция f является отношением двух многочленов, достаточно приравнять нулю ее числитель.

г) Нахождение полюсов функции. Если функция является отношением многочленов, то около точки a, где знаменатель обращается в нуль, а числитель отличен от нуля, ее график неограниченно удаляется от оси абсцисс. Такие точки называются *полюсами* функции. Расположение функции относительно вертикальной прямой $x = a$ зависит от знака функции слева и справа от точки a. Например, если слева от a функция положительна, а справа отрицательна, то ее график имеет вид, показанный на рисунке 32, *а*. А если функция положительна и слева, и справа от точки a, то ее график имеет вид, показанный на рисунке 32, *б*. Первый случай имеет, например, место для функции $y = \dfrac{1}{x^2-4}$ около точки $x = -2$, а второй — для функции $y = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ около точки $x = 3$.

д) Нахождение промежутков знакопостоянства. Знание нулей и полюсов функции позволяет определить *промежутки знакопостоянства*, так как изучаемые нами функции могут поменять знак, лишь перейдя через нулевое значение или через полюс. Поэтому надо разбить ось абсцисс на части точками нулей и полюсов функции и определить знак функции на каждом промежутке.

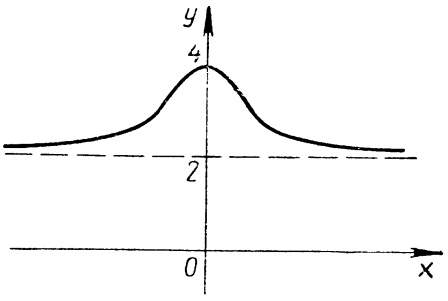


Рис. 33

е) Исследование поведения функции на бесконечности. Чтобы определить поведение функции на бесконечности, надо постараться представить ее в виде суммы какой-нибудь функции, поведение которой нам уже известно, и функции, значения которой приближаются к нулю при удалении x от начала координат. Тогда, отбрасывая малое слагаемое, мы получаем возможность судить о поведении функции на бесконечности.

Например, функцию $y = \frac{2x^2+4}{x^2+1}$ можно записать так: $y = 2 + \frac{2}{x^2+1}$. Ясно, что при возрастании знаменателя дробь $\frac{2}{x^2+1}$ будет уменьшаться и приближаться к нулю. Поэтому при больших значениях $|x|$ значения функции $y = \frac{2x^2+4}{x^2+1}$ почти равны двум. Более того, можно сказать, что при больших значениях $|x|$ она немного больше, чем 2. Ее график изображен на рисунке 33.

Пример. Применим намеченный план исследования к функции $y = \frac{x^2-1}{x^2-4}$.

а) Функция определена, если x отлично от 2 и -2.

б) Так как

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2-4} = \frac{x^2-1}{x^2-4} = f(x),$$

то функция четна, ее график симметричен относительно оси ординат. Поэтому будем исследовать эту функцию лишь при $x \geqslant 0$.

в) Функция f обращается в нуль при $x = 1$ (напомним, что мы исследуем функцию лишь на положительной полуоси).

г) Полюсом функции f на положительной полуоси является точка $x = 2$ (положительный корень уравнения $x^2 - 4 = 0$).

д) Точки 1 и 2 разбивают положительную полуось на части $[0, 1[$, $]1,2[$, $]2, +\infty[$. На каждой из этих частей функция сохраняет

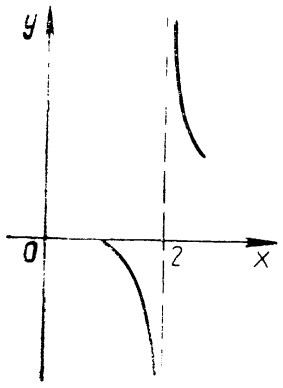


Рис. 34

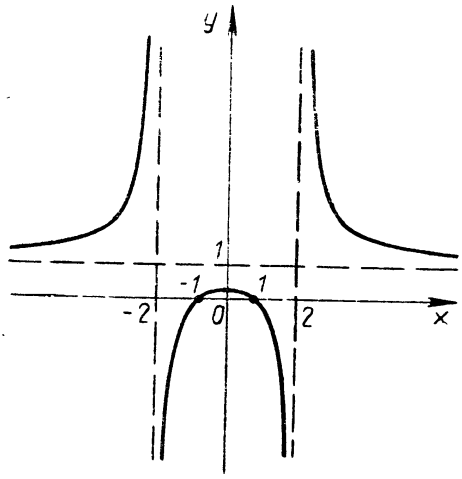


Рис. 35

знак. Подставляя в $\frac{x^2-1}{x^2-4}$ значения $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = 3$, убеждаемся, что эта функция положительна на $[0,1[$ и на $]2, +\infty[$, а на $]1, 2[$ отрицательна. Отсюда следует, что поведение функции около точки $x = 2$ имеет вид, показанный на рисунке 34.

е) Так как $\frac{x^2-1}{x^2-4} = 1 + \frac{3}{x^2-4}$,

то при больших значениях $|x|$ функция f почти равна 1, причем она немного больше, чем 1.

Проведенный анализ позволяет составить следующую таблицу:

x	0	$[0,1[$	1	$]1,2[$	$2-0$	$2+0$	$]2,+\infty[$	$+\infty$
y	$\frac{1}{4}$	>0	0	<0	$-\infty$	$+\infty$	>0	$1+0$

В этой таблице применены условные сокращения. Запись $2-0$ означает, что x приближается к числу 2, оставаясь левее этого числа. Соответствующая этому значению запись $-\infty$ показывает, что значения y при этом неограниченно возрастают по модулю, оставаясь отрицательными, и потому график функции неограниченно удаляется вниз от оси абсцисс. Аналогичный смысл имеют записи $2+0$ и $+\infty$. А запись, что при $x = +\infty$ имеем $y = 1+0$, означает, что при неограниченном увеличении x значения y неограниченно приближаются к 1, оставаясь больше чем 1.

Пользуясь составленной таблицей, строим график функции на положительной полуоси, а потом симметрично отображаем его относительно оси ординат (рис. 35).

Разумеется, проведенное исследование еще недостаточно: оно не исключает, например, того, что график функции имеет неучтен-

ные нами изгибы. Но в данном случае легко показать, что никаких осложнений нет. Заметим, что знаменатель дроби $\frac{3}{x^2-4}$ при увеличении $|x|$ все время возрастает. Поэтому дробь все время уменьшается. А так как $\frac{x^2-1}{x^2-4} = 1 + \frac{3}{x^2-4}$, то никаких изгибов график иметь не может.

Упражнения

70. Исследуйте указанные функции и постройте их графики:

а) $y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$; б) $y = \frac{x^2+4}{x^2+1}$;

в) $y = \frac{x^2+1}{x^2+4}$; г) $y = \frac{x^2-1}{x^2+4}$;

д) $y = \frac{x^2-4}{x^2+1}$; е) $y = \frac{x^2+1}{x^2-4}$;

ж) $y = \frac{x^2+4}{x^2-1}$; з) $y = \frac{2(x^2+4)}{x^2-1}$.

71. Исследуйте функции на четность и нечетность:

а) $y = x^3 - 4x|x| - 3x$;
б) $y = 8x^{16} + x^6 - 3|x| + 8$;
в) $y = \frac{x^4+6}{x^2+2}$;
г) $y = \sqrt{x}$;
д) $y = \sqrt{x^2+4}$;
е) $y = \sqrt{x^2}$.

72. Пусть функция $y = f(x)$ определена для всех значений x. Докажите, что функция $y = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ четная, а функция $y = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ нечетная.

73. Представьте следующие функции в виде суммы четной и нечетной функций:

а) $y = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2|x| + 1$;

б) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$; в) $y = \frac{x^3-4}{x^2+8}$.

74. Докажите, что любую функцию, заданную для всех значений x, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

75. Докажите, что произведение двух четных и произведение двух нечетных функций является четными функциями, а произведение четной функции на нечетную — нечетной функцией.

76. Для следующих функций найдите полюсы и исследуйте их в окрестности полюсов:

а) $y = \dfrac{x}{x^3 + 8}$; б) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 + 2x - 3}$;

в) $y = \dfrac{x^3}{(x^2 - 4)(x^2 - 9)}$; г) $y = \dfrac{1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$.

77. Исследуйте поведение функций на бесконечности:

а) $y = \dfrac{3x^1}{x^4 + 1}$; б) $y = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$;

в) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 4}$; г) $y = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^3 + 1}$.

2. Применение геометрических преобразований к построению графиков функций. Как и для любых уравнений, графики функций можно строить, преобразуя уже известные графики. Например, если нам известен график функции $y = f(x)$, то график функции $y = f(x - \alpha) + \beta$ получается с помощью параллельного переноса. Действительно, запишем это равенство в виде $y - \beta = f(x - \alpha)$. Теперь ясно, что график такой функции получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса, при котором начало координат отображается на точку $A(\alpha, \beta)$. Точно так же убеждаемся, что график функции $y = \lambda f(x)$ при $\lambda > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью растяжения от оси абсцисс с коэффициентом λ. Если же $\lambda < 0$, то надо сначала выполнить растяжение графика с коэффициентом $|\lambda|$, а потом симметрично отобразить относительно оси абсцисс. Наконец, график функции $y = f(\lambda x)$ при $\lambda > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением от оси ординат с коэффициентом λ. Если же $\lambda < 0$, то после растяжения графика с коэффициентом $|\lambda|$ надо отобразить его симметрично оси ординат.

Пример 1. Применим метод геометрических преобразований к построению графика общей квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. За исходный график примем параболу $y = x^2$. Сначала сделаем тождественные преобразования: $y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. Если положить $-\dfrac{b}{2a} = \alpha$, $\dfrac{4ac - b^2}{4a} = \beta$, то получим уравнение $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Из него видно, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ получается из графика функции $y = ax^2$ параллельным переносом, при котором начало координат переходит в точку $A(\alpha, \beta)$, т. е. в точку $A\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

График же функции $y = ax^2$ при $a > 0$ получается из графика функции $y = x^2$ растяжением от оси абсцисс с коэффициентом a,

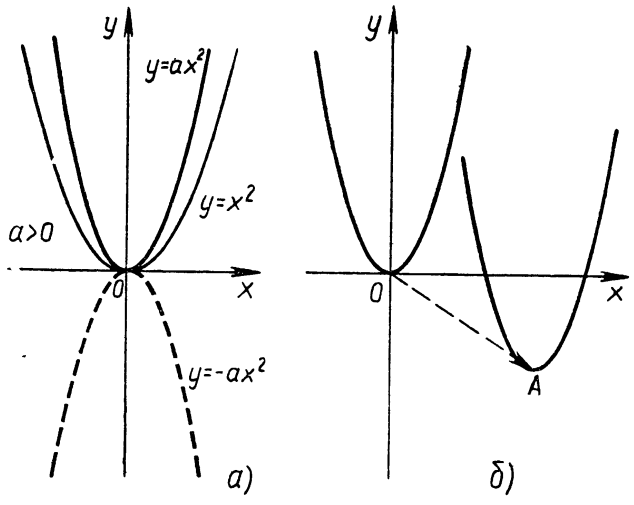


Рис. 36

а при $a < 0$ — растяжением с коэффициентом $|a|$ и последующей симметрией относительно оси абсцисс.

На рисунке 36 показано последовательное построение графика функции $y = ax^2 + bx + c$.

Пример 2. Точно так же, отправляясь от графика функции $y = \frac{1}{x}$, можно построить график функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (дробно-линейной функции). Отметим, что если $c = 0$, то дробно-линейная функция превращается в линейную: $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$. Если же $c \neq 0$, но $ad - bc = 0$, то выполняется пропорция $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, и потому при всех значениях x, кроме $x = -\frac{d}{c}$, дробно-линейная функция постоянна, $y = \frac{a}{c}$. Мы отбросим эти случаи и будем считать, что $c \neq 0$ и

$$ad - bc \neq 0.$$

Преобразуем дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$ следующим образом:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2\left(x+\frac{d}{c}\right)}.$$

Отсюда видно, что если положить $\alpha = -\frac{d}{c}$, $\beta = \frac{a}{c}$, $\lambda = \frac{bc-ad}{c^2}$, то получим, что

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\lambda}{x-\alpha} + \beta.$$

Поэтому график дробно-линейной функции получается из графика обратной пропорциональности $y = \frac{\lambda}{x}$ с помощью параллельного переноса, при котором начало координат переходит в точку $A(\alpha, \beta)$, т. е. $A\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$. График же функции $y = \frac{\lambda}{x}$ может быть при $\lambda > 0$ получен из графика функции $y = \frac{1}{x}$ растяжением от оси абсцисс с коэффициентом λ, а при $\lambda < 0$ — растяжением с коэффициентом $|\lambda|$ и симметрией относительно оси абсцисс.

Отметим, что дробно-линейная функция обращается в нуль при $x = -\frac{b}{a}$ и имеет полюс при $x = -\frac{d}{c}$. При неограниченном увеличении x ее значения приближаются к $\frac{a}{c}$. Если $x = 0$, то $y = \frac{b}{d}$. Поэтому можно начинать построение графика дробно-линейной функции с построения прямых $y = \frac{a}{c}$ и $x = -\frac{d}{c}$ (горизонтальной и вертикальной асимптот) и точек $B\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, $C\left(0, \frac{b}{d}\right)$. После этого график строится без труда (рис. 37).

Упражнения

78. Постройте графики функций:

а) $y = 2x^2 - 8x + 1$;

б) $y = -3x^2 - 12x + 4$;

в) $y = \frac{2x-1}{x-1}$; г) $y = \frac{3x+6}{x+4}$; д) $y = (x-1)^3 + 7$;

е) $y = \sqrt{x-2} + 1$;

ж) $y = (x+1)^4 - 5$;

з) $y = 2\sqrt[3]{x-4} + 5$.

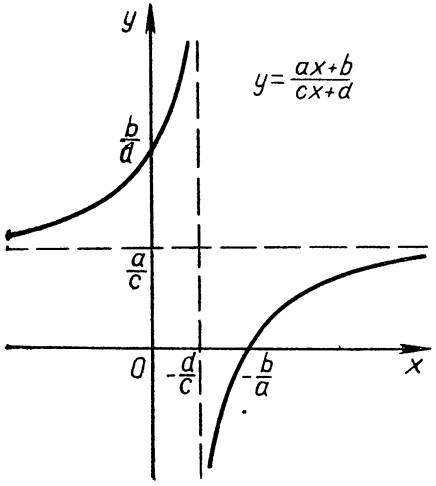


Рис. 37

3. «Сложение» и «умножение» графиков. Если функцию f, график которой необходимо построить, можно представить в виде суммы двух функций, имеющих известные графики, $f = g + h$, то поступают следующим образом. Сначала строят графики функций g и h, а потом для некоторых значений аргумента складывают ординаты точек этих графиков. Разумеется в первую очередь берут наиболее характерные точки графиков.

Пример 1. Построить график функции $y = x^2 + \frac{1}{x}$.

Графики функций $y = x^2$ и $y = \frac{1}{x}$ известны. Из рассмотрения графиков этих функций ясно, что график функции $y = x^2 + \frac{1}{x}$ около точки $x = 0$ почти сливается с графиком функции $y = \frac{1}{x}$, располагаясь несколько выше этого графика, а при больших значениях $|x|$ почти сливается с графиком функции $y = x^2$, располагаясь выше него при $x > 0$ и ниже него при $x < 0$. Вычисляя значения функции в нескольких промежуточных точках, видим, что искомый график имеет вид, показанный на рисунке 38.

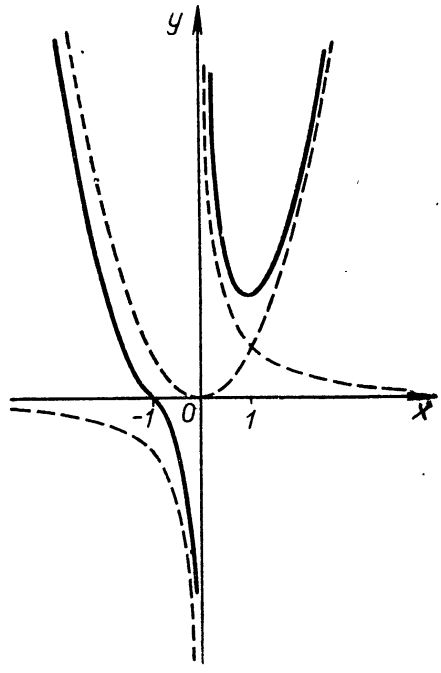


Рис. 38

Аналогичным образом поступают, когда функция является произведением или частным двух функций, графики которых известны.

Пример 2. Построим график функции $y = \frac{x}{1+x^2}$. Сначала строим графики функций $y = x$ и $y = 1 + x^2$. Выполняя деления соответствующих ординат, убеждаемся, что искомый график имеет вид, изображенный на рисунке 39.

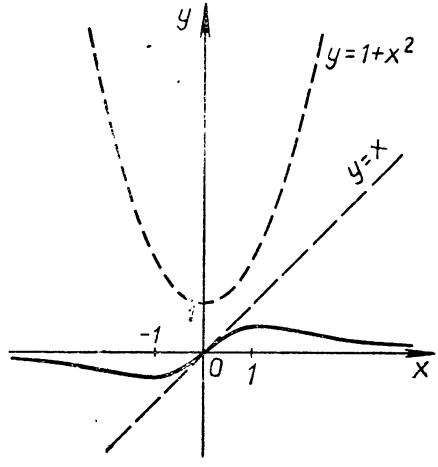


Рис. 39

Упражнения

79. Постройте графики следующих функций:

а) $y = x + \frac{1}{x^2}$

б) $y = \frac{1}{x^4 + 1}$ в) $y = \frac{x}{x^4 + 1}$;

г) $y = (x + 1)\left(\frac{1}{x^2} + 4\right)$.

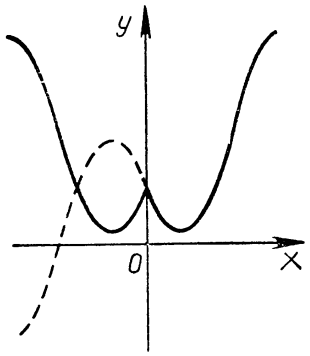


Рис. 40

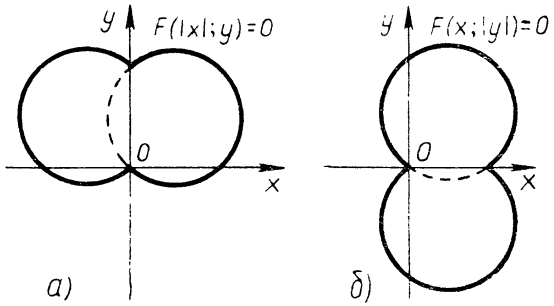


Рис. 41

4. Построение графиков функций и уравнений, содержащих знак модуля. По графику функции $y = f(x)$ легко построить график функции $y = f(|x|)$. Для этого надо принять во внимание, что $|x| = x$ при $x \geqslant 0$ и $|-x| = |x|$. Значит, при $x \geqslant 0$ графики функций $y = f(x)$ и $y = f(|x|)$ совпадают. Из равенства же $|-x| = |x|$ следует, что график функции $y = f(|x|)$ симметричен относительно оси ординат. Поэтому надо взять часть графика функции $y = f(x)$, лежащую в полуплоскости $x \geqslant 0$, симметрично отобразить ее относительно оси ординат и объединить получившиеся множества (рис. 40). Аналогично по графику уравнения $F(x, y) = 0$ строят графики уравнений $F(|x|, y) = 0$ и $F(x, |y|) = 0$ (рис. 41, *а* и *б*).

График уравнения $F(|x|, |y|) = 0$ строится так: берут часть графика уравнения $F(x, y) = 0$, лежащую в первой четверти, отображают ее относительно оси ординат, а потом объединение обеих частей графика отображают относительно оси абсцисс (рис. 42).

По аналогичной схеме строят график функции $y = f(-|x|)$: берут часть графика, расположенную в полуплоскости $x \leqslant 0$, отображают ее относительно оси ординат и объединяют получившиеся множества.

Предоставляем читателю разобрать, как строятся графики уравнений: $F(-|x|, y) = 0$, $F(x, -|y|) = 0$; $F(-|x|, |y|) = 0$, $F(|x|, -|y|) = 0$, $F(-|x|, -|y|) = 0$.

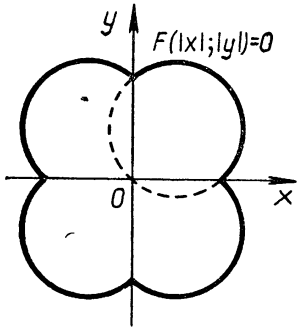


Рис. 42

Построим теперь по графику функции $y = f(x)$ график функции $y = |f(x)|$. По определению модуля имеем

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Значит, для построения графика функции $y = |f(x)|$ сначала изображают график функции $y = f(x)$, после чего часть графика, лежащую выше оси абсцисс и на ней, оставляют неизменной, а часть графи-

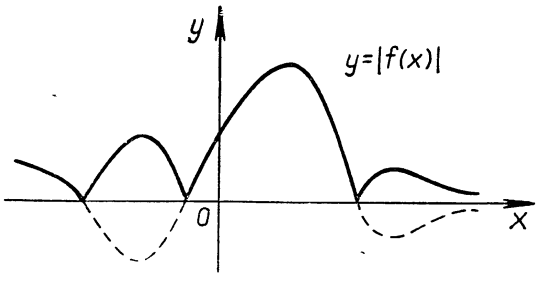


Рис. 43

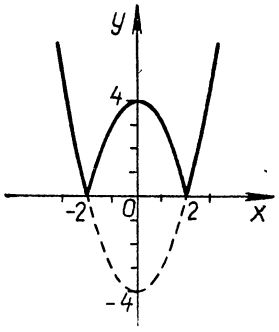


Рис. 44

ка, лежащую ниже этой оси, заменяют ее образом при симметрии относительно оси абсцисс (рис. 43).

Пример. Построить график функции $y = |x^2 - 4|$.

Сначала строим график функции $y = x^2 - 4$, а затем часть его для значений x от -2 до 2 (при этих x выражение $x^2 - 4$ отрицательно) отображаем относительно оси абсцисс (рис. 44).

Упражнения

80. Постройте графики функций:

а) $y = |x - 1|$; в) $y = ||x| - 1| - 1|$; д) $y = ||x^2 - 1| - 1|$;
б) $y = |x + 1|$; г) $y = |x^2 - 4|$; е) $y = |x| - 1$;
ж) $y = \left|\frac{x+1}{x-1}\right|$; з) $y = \left|\frac{2-x}{x+1}\right|$; и) $y = \frac{|x|+1}{|x|-1}$; к) $y = \frac{2-|x|}{|x|+1}$.

81. На рисунке 45 изображен график функции $y = f(x)$. Постройте графики функций:

а) $y = -f(|x|)$;
б) $y = |f(|x|)|$;
в) $y = |f(-|x|)|$;
г) $y = |f(x - 2)|$;
д) $y = |f(x) - 2|$;
е) $y = |f(|x - 2|)|$;
ж) $y = |f(-|x - 2|)|$.

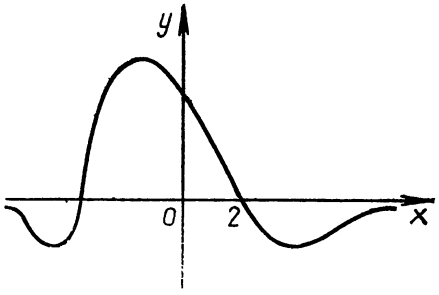


Рис. 45

82. Постройте графики функций:

а) $y = |x - 5| - 2|x| + |x + 3|$;
б) $y = 2|x + 4| - 3|x| + |x - 6|$;
в) $y = |x - 3| \cdot |x + 4|$;
г) $y = |x| \pm \sqrt{4 - x^2}$.

БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

Здесь рассказывается, как сравнивают между собой множества, содержащие бесконечно много элементов, и находят, когда в них поровну элементов, а когда в одном больше элементов, чем в другом.

1. Обратные отображения. Множества, содержащие конечное число элементов, называют *конечными*. Примерами таких множеств могут служить множество картофелин в мешке, рыб в море и даже атомов в Солнечной системе (хотя этих атомов очень много, их количество все же выражается некоторым натуральным числом). Множества же натуральных чисел, точек на плоскости, кругов на той же плоскости и т. д., *бесконечны* — количество их элементов нельзя выразить никаким натуральным числом.

Первоначально ученые думали, что не имеет смысла обсуждать вопрос, какое из двух бесконечных множеств «бесконечнее», например, чего больше — натуральных чисел или точек на прямой. Но во второй половине XIX века научились такие вопросы не только ставить, но и решать. Возникла теория бесконечных множеств, основанная на понятии обратимого отображения.

Чтобы узнать, в каком из двух конечных множеств больше элементов, можно их пересчитать. Если, например, первое содержит 2 701 элемент, а второе — лишь 1934 элемента, то ясно, что в первом множестве больше элементов, чем во втором. Но не всегда легко осуществить такой пересчет (попробуйте, например, пересчитать песчинки на морском берегу), да и не всегда он нужен. Чтобы узнать, например, кого больше в танцевальном зале — юношей или девушек, достаточно включить музыку, и если каждый юноша пригласит девушку танцевать и все примут участие в танце, то без подсчетов будет ясно, что юношей и девушек в зале поровну. Если же некоторые юноши останутся без партнерши, то это будет означать, что в зале больше юношей (рис. 1).

Рис. 1

На языке математики такой метод сравнения множеств можно описать следующим образом. Говорят, что **задано обратимое отображение множества A на множество B, если каждому элементу a из A поставлен в**

соответствие некоторый элемент b из B (рис. 2), причем каждый элемент из B соответствует одному и только одному элементу из A (например, если все юноши и девушки участвуют в танце, то каждому юноше соответствует одна девушка — та, с которой он сейчас танцует, причем каждая девушка танцует с одним и только одним юношей). Элемент b, соответствующий элементу a при отображении φ, называется его *образом* и обозначается $\varphi(a)$. Пишут также $a \to b$.

Каждое обратимое отображение φ устанавливает соответствие между элементами множества A и B. Это соответствие можно задать, указав его график, т. е. множество пар $(a; b)$, где $a \in A$, а b — элемент из B, соответствующий элементу a. Из определения обратимого отображения следует, что при этом каждый элемент a из A, так же как и каждый элемент b из B, попадает в одну и только одну пару. Например, обратимое отображение, показанное на рисунке 2, задается множеством пар

$$\{(a_1; b_1), (a_2; b_2), (a_3; b_3), (a_4; b_4), (a_5; b_5)\}.$$

Если φ — обратимое отображение множества A на множество B, то для каждого элемента b из B найдется один и только один элемент a из A, такой, что $\varphi(a) = b$. Поставив каждому $b \in B$ в соответствие такой элемент $a \in A$, что $\varphi(a) = b$, получим отображение B в A. Его называют *обратным* отображению φ и обозначают φ^{-1}. При этом, очевидно, каждый элемент из A является образом одного и только одного элемента из B, т. е. φ^{-1} — обратимое отображение B на A. Итак, если существует обратимое отображение φ множества A на B, то существует и обратимое отображение φ^{-1} множества B на A. Поэтому говорят, что **обратимое отображение φ множества A на множество B устанавливает взаимно однозначное соответствие между этими множествами.** Если между множествами A и B существует взаимно однозначное соответствие, то их называют *эквивалентными* (или равномощными) и пишут $A \sim B$.

Пример. Множество A четных натуральных чисел эквивалентно множеству B нечетных натуральных чисел. В самом деле, каждое четное натуральное число имеет вид $2n$, где $n \in N$, а каждое нечетное натуральное число — вид $2n - 1$, $n \in N$. Поэтому, сопоставляя числу $2n$ число $2n - 1$, получаем обратимое отображение A на B (при этом, например, числу 2 соответствует число 1, числу 100 — число 99 и т. д.).

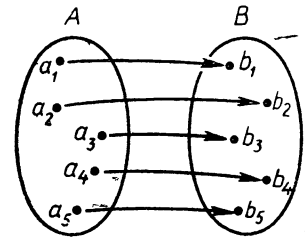


Рис. 2

Упражнения

1. Докажите, что любое множество A эквивалентно самому себе. Это свойство называют *рефлексивностью* отношения эквивалентности.

2. Докажите, что если $A \sim B$, то $B \sim A$. Это свойство называют *симметричностью* отношения эквивалентности.

3. Докажите, что если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$. Это свойство называют *транзитивностью* отношения эквивалентности.

4. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством N натуральных чисел и множеством B квадратов натуральных чисел.

5. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством N натуральных чисел и множеством $B = \{10^n \mid n \in N\}$ (т. е. множеством чисел вида 10^n, где $n \in N$).

6. Установите взаимно однозначное соответствие между кругами на плоскости, имеющими радиус 1, и точками той же плоскости.

7. Каждой окружности на плоскости сопоставляется ее центр. Задается ли этим взаимно однозначное соответствие между множеством окружностей на плоскости и множеством точек той же плоскости?

8. Постройте взаимно однозначное соответствие между множеством окружностей на плоскости и множеством квадратов, стороны которых параллельны осям координат.

9. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством точек полуокружности и множеством точек ее диаметра.

10. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством точек оси абсцисс и множеством точек параболы.

11. Каждой точке x оси абсцисс сопоставляется точка y оси ординат, такая, что $y = x^2$. Является ли это отображение взаимно однозначным соответствием между множествами точек оси абсцисс и оси ординат? Задает ли отображение $x \to x^2$ взаимно однозначное соответствие между множеством точек оси абсцисс и множеством точек оси ординат, для которых $y \geqslant 0$, между множеством точек оси абсцисс, для которых $x \geqslant 0$, и множеством точек оси ординат, для которых $y \geqslant 0$?

2. Сравнение множеств. Установить взаимно однозначное соответствие между конечными множествами A и B можно лишь в случае, когда эти множества имеют поровну элементов[1]. Это наводит на мысль определить тем же способом, что значит утверждение «Бесконечные множества A и B имеют поровну элементов». Именно, говорят, что **множества A и B** (безразлично, конечные или бесконечные) **имеют поровну элементов** (или: что в A столько же элементов, сколько в B), **если они эквивалентны**, т. е. если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Из упражнений 1—3 к п. 1 следует, что для бесконечных множеств отношение «*иметь столько же элементов*» обладает свойствами, похожими на свойства этого отношения для конечных множеств.

---

[1] Хотя это утверждение и кажется очевидным, на самом деле его можно доказать, исходя из системы аксиом, определяющих понятие натурального числа. Мы опускаем это доказательство, поскольку в школе не рассматривают аксиоматику натуральных чисел.

Но имеется одно существенное отличие между свойствами конечных и бесконечных множеств. Для конечных множеств всегда выполняется утверждение «часть меньше целого». Это значит, что если B — конечное множество, а A — подмножество в B, отличное от B, то A содержит меньше элементов, чем B. Для бесконечных множеств это не так: часть может содержать столько же элементов, что и все множество.

В самом деле, как показывает упражнение 4 к п. 1, существует взаимно однозначное соответствие между множеством N всех натуральных чисел и множеством B квадратов натуральных чисел (например, соответствие, при котором числу n сопоставляется его квадрат n^2, $n \to n^2$). Но множество квадратов натуральных чисел является лишь частью множества N, причем не совпадает с N. Часть множества A, не совпадающую с A, называют *правильной* частью. Значит, для бесконечных множеств можно установить взаимно однозначное соответствие между всем множеством и его правильной частью.

Итак, если существует взаимно однозначное соответствие между бесконечным множеством A и правильной частью B_1 множества B, то еще нельзя утверждать, что в A меньше элементов, чем в B (если бы A и B были конечными множествами, то это утверждение было бы справедливо). Введем следующее определение.

В A не больше элементов, чем в B, если A эквивалентно подмножеству B_1 множества B (т. е. если $A \sim B_1$, где $B_1 \subset B$).

Это отношение обладает свойствами, похожими на свойства отношения «иметь не больше элементов, чем» для конечных множеств:

а) если в A не больше элементов, чем в B, а в B не больше элементов, чем в C, то в A не больше элементов, чем в C;

б) если в A не больше элементов, чем в B, а в B не больше элементов, чем в A, то в A и B поровну элементов.

Смысл утверждения а) виден из рисунка 3: если есть обратимое отображение множества A на часть множества B и обратимое отображение множества B на часть множества C, то A можно обратимо отобразить на часть множества C.

Хотя утверждение б) кажется столь же очевидным, как и утверждение а), его доказательство весьма сложно, и мы его опускаем. Любопытно, что основатель теории множеств Георг Кантор, сформулировавший это утверждение, не смог его доказать и рассказал об этом на лекции, которую он читал студентам университета. Через несколько дней молодой студент Феликс Бернштейн принес ему доказательство этой теоремы. Поэтому ее называют теоремой Кантора—Бернштейна.

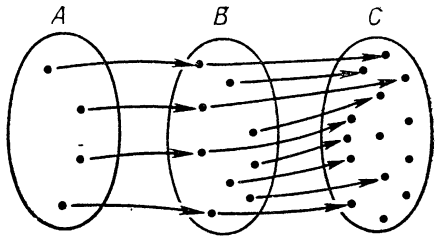


Рис. 3

Теперь мы уже можем определить, что значат слова «*B множестве A меньше элементов, чем в множестве B*». Это значит, что, во-первых, в A не больше элементов, чем в B (т. е. $A \sim B_1$, $B_1 \subset B$), а во-вторых, что A и B неэквивалентны (т. е. что в A и B не поровну элементов).

Часто оказывается полезным следующее утверждение:

Если существует отображение φ множества A на множество B, то в B не больше элементов, чем в A. В самом деле, поставим в соответствие каждому элементу b из B подмножество $\varphi^{-1}(b) \subset A$, состоящее из всех таких элементов $a \in A$, что $\varphi(a) = b$. По предположению, для всех $b \in B$ множества $\varphi^{-1}(b)$ непусты (иначе φ отображало бы A не на все B, а на его собственное подмножество). Выберем из каждого множества $\varphi^{-1}(b)$, $b \in B$ по одному элементу и обозначим через A_1 множество всех выбранных элементов. Из построения ясно, что множества A_1 и B эквивалентны, причем $A_1 \subset A$. Это и значит, что в B не больше элементов, чем в A.

В проведенном выше доказательстве было использовано следующее утверждение: если задана некоторая совокупность множеств, то можно образовать новое множество, выбрав из каждого множества по одному элементу. Это утверждение кажется совершенно очевидным. Но, несмотря на это, оно приводит к столь парадоксальным следствиям, что ряд математиков предпочитают не прибегать к нему. Отметим, что с помощью этого утверждения, называемого аксиомой Цермело, можно доказать, что если A и B — любые два множества, то A эквивалентно части B или B эквивалентно части A (при этом может случиться, что $A \sim B$).

Упражнения

12. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством N натуральных чисел и множеством четных натуральных чисел.

13. Установите взаимно однозначное соответствие между отрезками $[a, b]$ и $[c, d]$ числовой прямой.

14. Докажите, что точек на плоскости не больше, чем окружностей на той же плоскости.

15. Докажите, что положительных чисел не больше, чем окружностей на плоскости.

16. Докажите двумя способами, что в квадрате не меньше точек, чем на его стороне.

17. Докажите, что если в A меньше элементов, чем в B, а в B — меньше элементов, чем в C, то в A меньше элементов, чем в C.

3. Мощность множества. Счетные множества. Как уже говорилось, *конечные* множества сравнивают друг с другом не только путем установления взаимно однозначного соответствия между ними или между одним из них и подмножеством другого, но и путем пересчета элементов. В результате такого пересчета получается ответ в виде некоторого натурального числа, и задача сравнения множе-

ств сводится к сравнению получившихся чисел. При этом всем эквивалентным конечным множествам соответствует одно и то же натуральное число. Поэтому можно сказать, что натуральное число — это общее свойство класса эквивалентных множеств[1]. По аналогии с этим введем понятие *мощности* множества.

Мощностью называется общее свойство класса эквивалентных друг другу множеств.

Иными словами, мощность множества A определяется так: берем все множества, эквивалентные A (т. е. такие, что между ними и A можно установить взаимно однозначное соответствие). То общее, что есть у всех этих множеств, и есть мощность множества A. Для конечных множеств мощность совпадает с числом элементов множества.

Мощность множества A обозначают $|A|$. Свойства отношений «столько же элементов» и «не больше элементов, чем...» можно записать следующим образом:

если $|A| = |B|$, то $|B| = |A|$;

если $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$;

если $|A| \leqslant |B|$ и $|B| \leqslant |C|$, то $|A| \leqslant |C|$;

если $|A| \leqslant |B|$ и $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

Множества, эквивалентные множеству N натуральных чисел, называют *счетными*. Иными словами, множество A счетно, если можно установить взаимно однозначное соответствие между A и множеством натуральных чисел. Обозначим элемент множества, соответствующий натуральному числу n, через a_n. Тогда элементы из A можно расположить по порядку номеров:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Таким образом, множество A счетно в том и только том случае, когда оно бесконечно, причем его элементы можно перенумеровать.

Докажем некоторые утверждения о счетных множествах.

Теорема 1. **Любое бесконечное подмножество B счетного множества A счетно.**

Доказательство. Так как множество A счетно, его элементы можно перенумеровать:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Поскольку B — подмножество в A, то элементы множества нахо-

[1] На самом деле такой подход к понятию натурального числа таит в себе сложности, связанные с тем, что без понятия о натуральных числах трудно определить, какие множества конечны, а какие — бесконечны. Поэтому возникает логический круг — натуральные числа определяются через конечные множества, а конечные множества — через натуральные числа. Одним из возможных выходов является определение конечного множества как множества, не эквивалентного никакой своей правильной части. Но и на этом пути возникают осложнения. Поэтому предпочитают определять натуральные числа с помощью системы аксиом, а конечные множества — как множества, эквивалентные одному из множеств вида $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

дятся среди перенумерованных. Поэтому их можно перенумеровать по порядку. Это и значит, что B счетно.

Например, множество четных натуральных чисел — подмножество множества N. Выписывая четные числа в порядке возрастания и нумеруя их, непосредственно убеждаемся в счетности множества четных натуральных чисел:

числа $2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$

номера $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$.

Вообще, любое бесконечное подмножество множества N счетно. Например, счетны множества нечетных чисел, простых чисел, квадратов натуральных чисел и т. д.

Теорема 2. **Любое бесконечное множество A содержит счетное подмножество.**

Доказательство. Так как множество A бесконечно, то оно непусто. Поэтому из него можно выбрать какой-то элемент. Обозначим его a_1. Оставшееся множество $A \setminus \{a_1\}$[1] тоже непусто — иначе A состояло бы лишь из одного элемента a_1 и было бы конечным. Поэтому из $A \setminus \{a_1\}$ можно выбрать еще один элемент a_2. Далее точно так же доказывается, что из $A \setminus \{a_1, a_2\}$ можно выбрать элемент a_3 и т. д. В результате извлекаем из A счетное подмножество $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.

Теорема 2 показывает, что мощность любого бесконечного множества не меньше, чем у счетного множества, поэтому **мощность счетного множества — наименьшая из мощностей бесконечных множеств.**

Мы видели выше, что счетное множество эквивалентно своей правильной части (например, N эквивалентно множеству чисел вида 10^n). Так как любое бесконечное множество содержит счетное подмножество, приходим к следующему выводу:

Любое бесконечное множество эквивалентно некоторой своей правильной части.

Так как ни одно конечное множество не может быть эквивалентно своей правильной части, то указанное свойство характерно для бесконечных множеств.

Рассмотрим теперь множество Z всех целых чисел:

$$Z = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

На первый взгляд кажется, что это множество невозможно перенумеровать, что оно не является счетным. Ведь если мы начнем нумеровать, скажем, с числа 0, а потом будем нумеровать вправо, то все отрицательные числа окажутся незанумерованными. Если же мы будем нумеровать начиная с нуля влево, то незанумерованными окажутся все положительные числа. Однако эту нумерацию можно осуществить, если вести ее не в одном направлении, а все

[1] Символ $A \setminus B$ обозначает множество, полученное из A удалением элементов множества B.

время меняя его. Номера, которые при этом получат целые числа, видны из следующей таблицы:

Числа	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5
Номера	11	9	7	5	3	1	2	4	6	8	10

Эту нумерацию можно задать так: номер числа n, где $n \in N$, равен $2n$, номер числа $-n$, где $n \in N$, равен $2n + 1$, а число 0 получает номер 1.

Итак, **множество целых чисел счетно.** Рисунок 4 показывает, как перенумеровать множество точек на плоскости, обе координаты которых — целые числа. Значит, и это множество счетно. Однако каждый раз придумывать способ нумерации того или иного множества довольно сложно. Общий подход, позволяющий решить большинство таких задач, дается теоремой, которую мы сейчас сформулируем и докажем.

Назовем *числовым кортежем длины n* любые n неотрицательных целых чисел (не обязательно различных), стоящих в определенном порядке, причем последнее число отлично от нуля. Например, (7) — кортеж длины 1, (12, 25) — кортеж длины 2, (4, 15, 4) — кортеж длины 3 и т. д. Два числовых кортежа считаются равными в том и только том случае, когда на каждом месте в них стоят одни и те же числа. Если же они отличаются друг от друга хотя бы в одном месте, то они различны. Например, $(4, 16, 7, 4) \neq (16, 4, 7, 4)$. Разумеется, два кортежа различной длины всегда различны.

Теорема 3. **Множество S числовых кортежей счетно.**

Доказательство. Возьмем последовательность простых чисел[1], расположенных в порядке возрастания:

$$2, 3, 5, 7, \ldots .$$

Занумеруем эти числа, т. е. положим $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ и т. д. Каждому числовому кортежу $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ поставим в соответствие натуральное число

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}.$$

Например, кортежу (4, 1, 3) сопоставляется число $2^4 3^1 5^3 = 6000$. При этом различным кортежам соответствуют различные натуральные числа. В самом деле, предположим, что кортежи $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ и $(l_1, l_2, \ldots, l_s)$ различны, а им соответствует одно и то же число m.

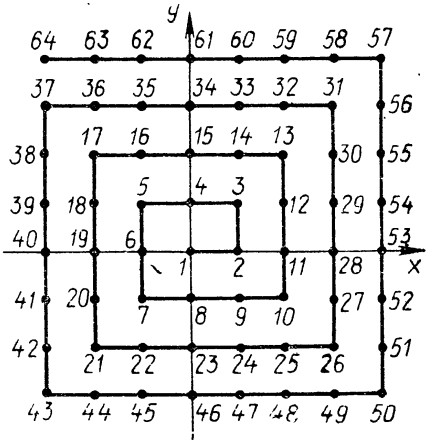


Рис. 4

[1] Как известно, множество простых чисел бесконечно.

Тогда мы имели бы, что

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ \ldots \ p_n^{k_n} = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_s^{l_s},$$

и потому m обладало бы двумя различными разложениями на простые множители, что невозможно.

Так как каждое натуральное число, кроме 1, разлагается на простые множители, то соответствие $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \to p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$ задает обратимое отображение множества числовых кортежей на множество натуральных чисел, больших единицы. Так как это множество счетно, то и множество S счетно.

Чтобы с помощью доказанной теоремы установить счетность некоторого бесконечного множества A, нужно поставить каждому элементу этого множества в соответствие числовой кортеж так, чтобы различным элементам соответствовали различные кортежи. Иными словами, нужно «зашифровать» каждый элемент множества некоторым числовым кортежем. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством A и подмножеством счетного множества S. Так как всякое бесконечное подмножество в S счетно, то и A счетно.

Пример 1. Докажем, что множество положительных дробей счетно.

В самом деле, каждая дробь $\frac{m}{n}$ задается числовым кортежем (m, n) длины 2, причем различным дробям соответствуют различные кортежи. Значит, множество дробей счетно.

Пример 2. Докажем, что множество всех дробей счетно.

Любую дробь $\pm\frac{m}{n}$ можно задать кортежем (k, m, n) длины 3, где $k = 1$, если дробь положительна, и $k = 2$, если она отрицательна. Значит, множество всех дробей счетно.

Пример 3. Докажем, что множество квадратных уравнений с натуральными коэффициентами счетно.

В самом деле, уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c— натуральные числа, можно задать числовым кортежем (a, b, c). Поэтому оно счетно.

Лишь несколько сложнее доказывается счетность множества квадратных уравнений с целыми коэффициентами.

Из теоремы 3 вытекает одно полезное следствие.

Следствие. Объединение конечного или счетного множества счетных множеств счетно.

Доказательство. Разберем сначала случай, когда заданные множества попарно не пересекаются (т. е. никакие два из них не имеют общих элементов). Так как заданная совокупность множеств счетна, их можно перенумеровать: A_1, A_2, ..., A_m, ... случай, когда общее число множеств конечно, рассматривается аналогично). Далее, каждое из множеств A_m счетно, и потому его элементы можно перенумеровать. Мы снабдим каждый элемент «шифром», состоящим из двух чисел: первое число показывает

Рис. 5

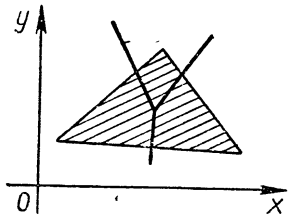


Рис. 6

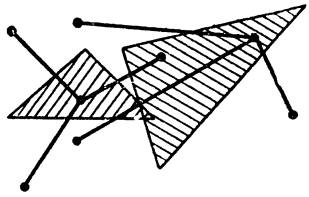


Рис. 7

номер множества, а второе — номер элемента в этом множестве:

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots\},$$
$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_m = \{a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}, \ldots\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Каждый элемент a_{mn} объединения $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ этих множеств нумеруется числовым кортежем (m, n). Так как множество таких кортежей счетно, то и множество A счетно.

Если множества $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$ могут иметь общие элементы, то каждому элементу из A соответствует не один, а несколько кортежей (столько, в какое количество множеств он входит). Поэтому существует отображение счетного множества S_2 кортежей (m, n) на множество A. Значит, множество A счетно[1].

Аналогично доказывается, что **объединение конечного или счетного множества конечных множеств конечно или счетно** (при этом может случиться, что объединение счетной совокупности конечных множеств — конечное множество; например, если все эти множества совпадают друг с другом).

Иногда при доказательстве счетности множества приходится прибегать к более сложным построениям. Назовем развилкой совокупность трех отрезков, выходящих из одной точки (рис. 5). Докажем, что на плоскости любое множество попарно непересекающихся развилок не более, чем счетно. Для этого выберем на плоскости систему координат и поставим в соответствие каждой развилке треугольник, все вершины которого имеют рациональные координаты, а каждая сторона пересекает один и только один отрезок развилки (рис. 6). Из теоремы 3 следует, что множество таких треугольников счетно. Но легко доказать, что непересекающимся развилкам соответствуют разные треугольники (рис. 7). Поэтому множество попарно непересекающихся развилок счетно.

[1] Отметим, что утверждение «Если существует отображение счетного множества A *на* бесконечное множество B, то B счетно» можно доказать, не используя аксиому Цермело (см. с. 172). Для этого достаточно каждому элементу b из B поставить в соответствие число, равное наименьшему из номеров элементов, отображающихся в b (например, если в b отображаются элементы a_5, a_8, a_{11}, то он получает номер 5). Этим определяется обратимое отображение B в N, а потому B счетно.

Упражнения

18. Покажите счетность следующих множеств:
а) точек плоскости, обе координаты которых — четные числа,
б) точек плоскости, обе координаты которых — нечетные числа,
в) линейных уравнений с целыми коэффициентами,
г) десятичных дробей,
д) кубических уравнений с натуральными коэффициентами,
е) рациональных чисел,
ж) уравнений вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ с целыми коэффициентами,
з) точек плоскости с рациональными координатами,
и) треугольников, все вершины которых имеют рациональные координаты,
к) попарно непересекающихся восьмерок на плоскости.

4. Несчетные множества. Все бесконечные множества, которые мы до сих пор рассматривали, оказались счетными. Поэтому возникает вопрос, существуют ли несчетные бесконечные множества или же все бесконечные множества счетны. Приведем пример несчетного бесконечного множества. Докажем, что множество точек любого отрезка несчетно. Для этого нам понадобится следующее утверждение:

Пусть $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$ — такая последовательность отрезков, что каждый следующий из них — часть предыдущего. Тогда эти отрезки имеют, по крайней мере, одну общую точку.

Смысл этого утверждения ясен из рисунка 8. Оно выражает свойство *непрерывности* прямой линии. Дело в том, что если бы мы удалили из прямой хотя бы одну точку, то можно было бы построить последовательность вложенных друг в друга отрезков, имеющих пустое пересечение (для этого достаточно взять отрезок длины 1, 1/2, 1/4; 1/8 и т. д. с центром в выколотой точке; их пересечением должна была бы быть точка a, но мы ее выкололи). Таким образом, наше утверждение означает, что из прямой не удалена ни одна точка, что прямая линия непрерывна.

Предположим, что множество точек отрезка Δ счетно. Тогда их можно было бы перенумеровать $\Delta = \{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\}$. Разделим теперь отрезок Δ на три части одинаковой длины: Δ_1', Δ_1'', Δ_1'''. Точка a_1 принадлежит или только одной из этих частей или двум таким частям (если она совпадает с одной из точек деления). Во всяком случае, найдется часть, не содержащая эту точку. Обозначим эту часть Δ_1 и снова разделим ее на три части одинаковой длины. Тогда хотя бы одна из этих частей не содержит точки a_2. Обозначим эту часть Δ_2. Продолжая описанный процесс, получаем последовательность отрезков

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$$

Рис. 8

такую, что каждый из них содержит следующий за ним, причем для всех n отрезок Δ_n не содержит точку a_n. Найдется хотя бы одна точка a, принадлежащая всем отрезкам Δ_n. Покажем, что она не совпадает ни с одной из точек $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. В самом деле, если бы совпадала с a_n, то a не принадлежала бы отрезку Δ_n, а мы выбрали точку a так, что она принадлежит всем нашим отрезкам.

Итак, точка a не совпадает ни с одной из точек $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Но по предположению точками $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ исчерпывается все множество точек отрезка Δ, и потому a не принадлежит этому отрезку, вопреки построению. Полученное противоречие показывает, что предположение о возможности перенумеровать все точки отрезка неверно, т. е. что это множество несчетно.

Приведем еще один пример несчетного множества. Рассмотрим множество всех бесконечных последовательностей, составленных из нулей и единиц, например, таких, как

$$01010101\ldots\ldots\ldots$$
$$101001000100001\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Докажем, что это множество несчетно. В самом деле, предположим, что все последовательности можно перенумеровать:

$$\alpha_1 = a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \ldots$$
$$\alpha_2 = a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_m = a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

где через a_{mn} обозначена n-я цифра в последовательности α_m ($a_{mn} = 0$ или 1). Построим новую последовательность

$$\beta = b_1 b_2 \ldots b_m \ldots$$

по следующему правилу: если $a_{mm} = 0$, то $b_m = 1$, а если $a_{mm} = 1$, то $b_m = 0$.

Покажем, что последовательность β не совпадает ни с одной из последовательностей α_m, т. е. не получила никакого номера. В самом деле, если бы мы имели $\beta = \alpha_m$, то у β и α_m все элементы были бы одинаковы. Но они отличаются друг от друга на m-м месте: у последовательности β здесь стоит цифра b_m, а у α_m — цифра a_{mm}. Мы же строили β так, чтобы выполнялось неравенство $b_m \neq a_{mm}$. Таким образом, у β номера нет, и потому предположение о возможности занумеровать все члены последовательности неверно.

Упражнения

19. Докажите, что множество точек квадрата несчетно.

20. Докажите, что множество точек окружности несчетно.

21. Докажите, что множество бесконечных последовательностей, составленных из цифр 0, 1 и 2, несчетно.

5. Множество действительных чисел. Множество точек отрезка, а тем более множество точек всей прямой линии, несчетно. В то же

время множество Q рациональных чисел счетно (см. упр. 18). Поэтому не существует взаимно однозначного соответствия между множеством Q и множеством точек прямой линии. Иными словами, множество точек на прямой, координаты которых рациональны, образует лишь часть всего множества точек прямой линии. Для того чтобы сопоставить каждой точке прямой число — ее координату, надо расширить множество Q рациональных чисел и ввести новые числа. Мы будем называть их действительными числами, а множество действительных чисел обозначим R.

Теория действительных чисел будет построена в IX классе. Сейчас изложим лишь те сведения из этой теории, которые понадобятся нам сейчас.

Любое действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби, т. е. выражения вида

$$\pm A, a_1 \ldots a_n \ldots,$$

где A — натуральное число или нуль, $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, например:

$$\pi = 3{,}14159\ldots,$$
$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots,$$
$$-\frac{1}{2} = -0{,}5000\ldots.$$

При этом различные действительные числа имеют различные записи в виде бесконечных десятичных дробей, а каждое число, вообще говоря, имеет лишь одну такую запись. Исключение составляют десятично-рациональные числа, т. е. числа, имеющие запись, кончающуюся последовательностью нулей (например, 0,2500000...). Если в такой записи уменьшить последнюю отличную от нуля цифру на единицу, а все следующие за ней нули заменить девятками, то получится новая бесконечная десятичная дробь, выражающая то же число, что и дробь, кончавшаяся последовательностью нулей, например:

$$0{,}2500000\ldots = 0{,}2499999\ldots$$

Кроме того, десятичные дроби $0{,}000\ldots$ и $-0{,}0000\ldots$ задают одно и то же число, а именно нуль.

Действительные числа, имеющие запись вида $A, a_1 \ldots a_n \ldots$, в которых хотя бы одна цифра отлична от нуля, называются положительными, а числа, имеющие запись вида $-A, a_1 \ldots a_n \ldots$, — отрицательными. Если выбрана единица длины (т. е. фиксирован некоторый отрезок), то каждому отрезку AB соответствует положительное действительное число — длина этого отрезка, измеренная единицей длины.

Обратно, если задано какое-то положительное действительное число α, то существует отрезок, длина которого равна α.

Теперь уже легко установить **взаимно однозначное соответствие между множеством R действительных чисел и множеством точек на прямой.** Для этого выбираем на прямой точку O — на-

чало координат, направление и единицу длины. Каждой точке ставим в соответствие число α, равное длине отрезка OA, если направление от O к A положительно, и той же длины со знаком минус в противном случае. Из сказанного выше следует, что это соответствие взаимно однозначно.

Упражнения

22. Может ли действительное число иметь три различных представления в виде бесконечной десятичной дроби?

23. Докажите, что если для бесконечной десятичной дроби все приближения с избытком, начиная с n-го, совпадают, то все цифры дроби, начиная с некоторой, суть девятки.

24. Существует ли наибольшее число, которое меньше чем 0,9 и записывается без цифр 8 и 9?

25. Существует ли наибольшее число, которое меньше чем 1 и записывается без цифр 7 и 8?

26. Постройте наибольшее действительное число, которое меньше чем 0,9 и не содержит в десятичной записи цифру 9.

27. Опишите множество точек координатной прямой, которые лежат между 0 и 1 и в десятичной записи которых первые три цифры после запятой отличны от цифры 5.

28. Докажите, что множество десятично-рациональных чисел счетно.

6. Множество мощности континуума. Если множество A эквивалентно множеству точек отрезка $[0; 1]$, то говорят, что оно имеет мощность континуума (от латинского «континуум» — непрерывный). Докажем, что **множество точек любого отрезка имеет мощность континуума.** Мы даже докажем больше, а именно: существование взаимно однозначного соответствия между точками отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$. На рисунке 9 показано, как устанавливается такое соответствие.

Докажем теперь, что **множество точек открытого промежутка $]0; 1[$ имеет мощность континуума.** Для этого выберем на этом промежутке последовательность точек $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Положим, $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = 1$, $\varphi\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $\varphi\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3}$, $\ldots$, $\varphi\left(\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n}$, ... и $\varphi(x) = x$, если x — точка промежутка $]0; 1[$, не имеющая вида $\frac{1}{n}$. Мы получили взаимно однозначное отображение промежутка $]0; 1[$ на отрезок $[0; 1]$. Поэтому и промежуток $]0; 1[$ имеет мощность континуума.

Аналогично доказывается, что любой промежуток $]a; b[$ имеет мощность континуума. Ту же мощность имеют и полуоткрытые промежутки $[a; b[$ и $]a; b]$.

Докажем теперь, что **вся прямая линия имеет мощность конти-**

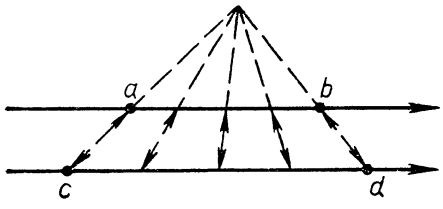


Рис. 9

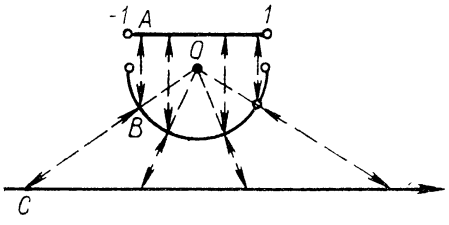


Рис. 10

нуума. Для этого надо установить взаимно однозначное соответствие между всей прямой и каким-нибудь открытым промежутком. На рисунке 10 показано, как устанавливается такое соответствие — сначала точке A промежутка $]-1; 1[$ сопоставляется лежащая под ней точка B полуокружности, а потом точка B сопоставляется точке C, лежащей на луче OC и на нашей прямой (O — центр полуокружности).

Поскольку прямую линию можно разбить на попарно непересекающиеся полуоткрытые промежутки $[n; n+1[$ (рис. 11), причем каждый из этих промежутков, равно как и вся прямая, имеет мощность континуума, то справедлива теорема:

Теорема 2. **Объединение счетной совокупности множеств, имеющих мощность континуума, имеет ту же мощность.**

Гораздо более удивительным является следующее утверждение:

Теорема 3. **Множество точек квадрата имеет мощность континуума.**

Это утверждение означает, что квадрат содержит столько же точек, что и отрезок, хотя на первый взгляд кажется, что в нем должно быть гораздо больше точек. Но мы уже знаем, что для бесконечных множеств правило «часть меньше целого» теряет силу.

Доказательство теоремы проводится следующим образом. Множество точек квадрата разбивается на два множества: точек его границы и внутренних точек. Ясно, что граница квадрата, состоящая из четырех отрезков, имеет мощность континуума. Осталось доказать, что ту же мощность имеет множество внутренних точек квадрата.

Для определенности возьмем квадрат координатной плоскости, имеющий вершины A (0; 0), B (1; 0), C (1; 1), D (0; 1) (рис. 12). Каждую внутреннюю точку M этого квадрата зададим ее координатами x и y. Они имеют вид

$$x = 0, x_1x_2 \ldots x_n \ldots,$$
$$y = 0, y_1y_2 \ldots y_n \ldots,$$

где x_n и y_n принимают значение 0, 1, 2, ..., 9. При этом, если числа x и y имеют две записи в виде бесконечной десятичной дроби, выбирается запись, не содержащая бесконечного множества девяток.

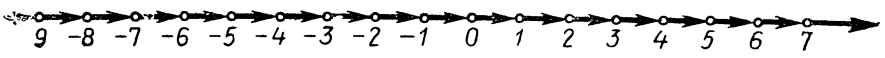


Рис. 11

Поставим в соответствие точке M действительное число, имеющее запись вида

$$z = 0, x_1y_1x_2y_2 \ldots x_n y_n \ldots$$

(т. е. мы «тасуем» десятичные знаки чисел x и y). Например, если

$$x = 0{,}261803\ldots,$$
$$y = 0{,}048950\ \ldots,$$

то

$$z = 0{,}206418890530\ldots$$

Легко проверить, что при этом различным точкам соответствуют различные числа. В самом деле, если точки M и N различны, то их координаты отличаются друг от друга хотя бы в одном десятичном знаке, а тогда соответствующие им действительные числа тоже различны.

Отображение $M\ (x, y) \to z$, таким образом, обратимо, а потому точек внутри квадрата не больше, чем действительных чисел, т. е. мощность множества внутренних точек квадрата не больше мощности континуума. Но, очевидно, она и не меньше этой мощности (хотя бы потому, что внутри квадрата есть отрезок), а потому равна ей. Но тогда и множество всех точек квадрата имеет мощность континуума.

Ту же мощность имеют множества точек круга, куба и вообще любой геометрической фигуры, содержащей хотя бы одну линию.

Упражнения

29. Установите взаимно однозначное соответствие между множествами точек круга и квадрата.

30. Установите взаимно однозначное соответствие между точками куба и некоторым подмножеством множества действительных чисел.

31. Укажите, какие действительные числа не являются образами внутренних точек квадрата при описанном выше отображении.

32. Докажите, что множество бесконечных последовательностей

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

действительных чисел имеет мощность континуума.

7. Иррациональные числа. Алгебраические и трансцендентные числа. Все действительные числа, не являющиеся рациональными, называют *иррациональными*. Примерами таких чисел могут служить $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{6}$, $4 + \sqrt[5]{7{,}1}$, π^2 и т. д. Можно доказать, что рациональные числа выража-

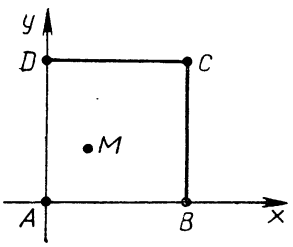


Рис. 12

ются периодическими десятичными дробями, т. е. что начиная с некоторого места в их десятичной записи повторяется одна и та же группа цифр:

$$\frac{1}{6} = 0{,}1666666...$$

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857...$$

Десятичная же запись иррациональных чисел *непериодична*. Например, число 0,10 100 1000100001000001 ... иррационально: в нем после единицы сначала идет один нуль, потом два нуля, потом три нуля, потом четыре нуля и т. д. **Множество иррациональных чисел несчетно.** В самом деле, если бы оно было счетно, то и все множество действительных чисел было бы счетным, как объединение двух счетных множеств, а мы знаем, что это не так. Можно доказать, что мощность множества иррациональных чисел такая же, как у множества всех действительных чисел, т. е. что оно является множеством континуальной мощности. Значит, иррациональных чисел гораздо «больше», чем рациональных.

Рациональное число $\frac{3}{5}$ является корнем уравнения первой степени $5a - 3 = 0$, имеющего целые коэффициенты. Обратно, корень любого уравнения $ax - b = 0$, коэффициенты a и b которого — целые числа, причем $a \neq 0$, рационален. Число $\sqrt{3}$ иррационально и потому не удовлетворяет никакому уравнению первой степени с целыми коэффициентами. Но оно удовлетворяет квадратному уравнению $x^2 - 3 = 0$, имеющему целые коэффициенты. Вообще, для любого числа, образованного из целых чисел с помощью операций сложения, умножения, деления и извлечения корня, можно найти уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0, \qquad (1)$$

с целыми коэффициентами, корнем которого оно является.

Определение. **Число α называется *алгебраическим*, если оно является корнем уравнения вида (1), все коэффициенты которого — целые числа, причем $a_0 \neq 0$. Неалгебраические числа называют *трансцендентными*.**

Таким образом, все числа, которые можно получить из целых чисел с помощью арифметических операций и извлечения корней, алгебраические. Но этим не исчерпывается множество алгебраических чисел. Например, корни уравнения $x^5 - 3x + 1 = 0$ — алгебраические числа, но выразить их через целые числа с помощью указанных выше операций невозможно.

В связи с задачей о квадратуре круга (построение с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу) возник вопрос: алгебраическое ли число π, т. е. можно ли написать уравнение с целыми коэффициентами, которому оно удовлетворяло бы? Но сначала надо выяснить, есть ли вообще трансцендентные числа или все действительные числа алгебраические.

Весьма остроумным приемом французский математик Лиувилль построил первые примеры трансцендентных чисел. А доказательство трансцендентности числа π, проведенное немецким ученым Линдеманном в 1882 году, было большим научным событием: из него следовала невозможность квадратуры круга. Тем самым была доказана неразрешимость задачи, стоявшей перед математиками более двух тысяч лет.

После создания теории множеств встал вопрос: каких же чисел больше — алгебраических или трансцендентных? Оказалось, что множество алгебраических чисел счетно, т. е. их можно перенумеровать. Это следует из того, что множество уравнений с целыми коэффициентами счетно, а каждое такое уравнение имеет лишь конечное число корней (уравнение n-й степени имеет не более чем n корней). Значит, множество алгебраических чисел является объединением счетного множества конечных множеств и потому счетно. Множество же трансцендентных чисел имеет мощность континуума. Следовательно, их гораздо больше, чем алгебраических. Но тем не менее и сейчас доказательство трансцендентности чисел того или иного вида является очень сложной задачей. Больших успехов в этой области добился советский математик А. О. Гельфонд. Им доказано, например, что числа $2^{\sqrt{2}}$, $7^{\sqrt[3]{5}}$ и т. д. трансцендентные.

8. Несуществование множества наибольшей мощности*. Мы пока не знаем множеств мощности, большей, чем мощность континуума. Возникает вопрос: а есть ли такие множества и как их построить? Чтобы решить его, напомним, что множество всех последовательностей из нулей и единиц имеет мощность континуума и потому несчетно (см. с. 179). Но последовательность из нулей и единиц является функцией, заданной на счетном множестве натуральных чисел и принимающей два значения: 0 и 1. Например, последовательность $\alpha = 1010010001\ldots$ можно задать так: $\alpha(1) = 1$ (т. е. первая цифра равна 1), $\alpha(2) = 0$, $\alpha(3) = 1$, $\alpha(4) = 0$, $\alpha(5) = 0$, $\alpha(6) = 1$ и т. д.

Это замечание подсказывает следующий метод построения множества, мощность которого больше мощности континуума: взять какое-нибудь множество X мощности континуума (например, множество всех действительных чисел) и обозначить через Y множество всех функций, заданных на X и принимающих значения 0 и 1. Примерами таких функций могут служить:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 2, \\ 1, \text{ если } x \geqslant 2, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ рационально}, \\ 1, \text{ если } x \text{ иррационально и т. д.} \end{cases}$$

Оказывается, **мощность множества Y больше, чем мощность континуума.** Чтобы доказать это, надо доказать два утверждения:

а) Существует взаимно однозначное соответствие между множеством X и некоторым подмножеством Y_1 в Y.

б) Не существует взаимно однозначного соответствия между множествами X и Y.

Первое из этих утверждений доказывается совсем просто. Надо каждому действительному числу α поставить в соответствие функцию f^α, задаваемую следующим образом:

$$f^\alpha(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \neq \alpha, \\ 1, \text{ если } x = \alpha. \end{cases}$$

Так как эта функция принимает лишь значения 0 и 1, то она принадлежит множеству Y. При этом ясно, что при $\alpha \neq \beta$ функции f^α и f^β различны. В самом деле, $f^\alpha(\alpha) = 1$, а $f^\beta(\alpha) = 0$, и потому функции f^α и f^β не совпадают друг с другом. Отсюда следует, что соответствие $\alpha \to f^\alpha$ является обратимым отображением X в Y. Значит, в X не больше элементов, чем в Y. Утверждение а) доказано.

Докажем теперь утверждение б). Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует взаимно однозначное соответствие между множествами X и Y. Обозначим функцию, соответствующую при этом числу α через f_α. Составим новую функцию φ, положив

$$\varphi(x) = 1 - f_x(x).$$

Таким образом, чтобы найти значение функции φ при $x = \alpha$, надо сначала найти функцию f_α, соответствующую числу α, найти значение $f_\alpha(\alpha)$ этой функции при $x = \alpha$ и вычесть полученное значение из единицы. Ясно, что получающаяся при этом разность тоже равна или нулю, или единице ($1 - 0 = 1$, $1 - 1 = 0$), а потому функция φ принадлежит множеству Y.

По предположению $\alpha \to f_\alpha$ является взаимно однозначным соответствием между множествами X и Y. Так как $\varphi \in Y$, то должно найтись такое число β, что $\varphi = f_\beta$, т. е. что для всех $x \in X$ $\varphi(x) = f_\beta(x)$. Так как $\varphi(x) = 1 - f_x(x)$, то получаем, что

$$1 - f_x(x) = f_\beta(x),$$

откуда $f_\beta(\beta) = \frac{1}{2}$. Это противоречит тому, что функция f_β принимает лишь значения 0 и 1. Полученное противоречие доказывает, что наше предположение ложно: взаимно однозначного соответствия между множествами X и Y быть не может.

Итак, **мощность множества всех функций f, заданных на множестве действительных чисел и принимающих значения 0 и 1, оказалась больше мощности континуума.** Можно доказать, что такую же мощность имеет множество всех функций, заданных на X и принимающих любые действительные значения. Чтобы получить

множество еще большей мощности, надо взять множество функций, заданных на Y и принимающих значения 0 и 1. Вообще, чтобы получить множество, имеющее мощность большую, чем некоторое множество A, надо взять множество функций f, заданных на множестве A и принимающих значения 0 и 1. Так как для любого множества можно построить множество еще большей мощности, то множества самой большой мощности не существует.

9. Исторические сведения. Теоретико-множественные идеи вызревали в математике на протяжении XIX столетия. В работах по теории чисел великого немецкого математика Карла Гаусса, относящихся к началу XIX века, использовались множества, состоящие из целых чисел (множество чисел, имеющих данный остаток при делении на n, множество чисел, представимых в виде суммы квадратов двух целых чисел, и т. д.). Такие множества играли важную роль во многих исследованиях по теории чисел, проведенных в середине XIX века немецкими математиками Э. Куммером, Р. Дедекиндом и др. С другой стороны, в геометрии в связи с изучением геометрических преобразований возникло понятие взаимно однозначного соответствия. В общем виде это понятие изучал чешский математик и философ Бернард Больцано.

Наиболее существенное влияние на развитие теоретико-множественных идей оказало исследование функций — отыскание множества их точек разрыва и т. д. Окончательное оформление теории бесконечных множеств как самостоятельной ветви математики произошло во второй половине XIX века в работах выдающегося немецкого математика Георга Кантора, которому принадлежат наиболее важные общие понятия и теоремы, касающиеся бесконечных множеств. Он ввел понятие мощности множества, счетности, множества мощности континуума, доказал счетность множества рациональных чисел, теоремы о счетных множествах, теорему о несчетности континуума и теорему об эквивалентности отрезка и квадрата.

Создание теории бесконечных множеств оказало глубокое влияние на все развитие математики XX века. Многие области современной математики (топология, общая алгебра, функциональный анализ) целиком базируются на понятиях теории множеств, многие классические направления (например, геометрия, теория вероятностей) были перестроены на теоретико-множественной основе.

Большой вклад в развитие теории множеств внесли русские и советские математики — Н. Н. Лузин, Д. Ф. Егоров, П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, П. С. Новиков и др. Ряд важных результатов по теории множеств принадлежит польским ученым В. Серпинскому, К. Куратовскому, С. Банаху и др.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Системы счисления и арифметические основы ЭВМ

7. Круглое число должно делиться на n, а совсем круглое — на n^2.

9. Если основание системы счисления четно, то число является четным тогда и только тогда, когда оно оканчивается четной цифрой. При нечетном основании четное число должно содержать четное количество нечетных цифр.

15. а) 1101; б) 1124; в) 2402; г) 3042.

16. а) 7301; б) 3207; в) 2466; г) 7335.

17. 3564; 2577; 1720.

18. 16235; 14352; 11435.

20. 0,84375; 0,8125; 0,552.

21. 0,791015625; 0,998046875; 0,5078125.

22. 0,65; 0,75; 1,35; 15,634; 651,42; 1733,72.

24. Дробь выражается конечной десятичной, если разложение ее знаменателя на простые множители не содержит других множителей, кроме 2 и 5; конечной восьмеричной, если разложение знаменателя не содержит простых множителей, отличных от 2.

25. Дробь будет конечной, если простые делители ее знаменателя являются делителями основания системы счисления.

26. 182,8125.

27. 111010011; 10101.

28. а) 10000011001; б) 1000010010011111011; в) 110000011.

29. 110111100.

30. $7246_8 = 111010100110_2$; $7616_8 = 111110001110_2$.

33. а) 6580; б) 307; в) 895678; г) ABC.

34. $16960{,}58_{16} = 10110100111000000{,}01011_2$.

Симметрии

4. Чтобы построить точку O_1, можно взять две произвольные точки M и N и выполнить последовательно перемещения, получив точки M' и N'. Точка O_1 есть точка пересечения срединных перпендикуляров к отрезкам MM' и NN'.

5. Заметьте, что последовательное выполнение двух осевых симметрий дает либо параллельный перенос, либо поворот.

19. Один из возможных способов решения этой задачи заключается в том, что мы сначала строим квадрат, две вершины которого лежат на прямой, а третья — на одной из сторон угла. Постройте несколько таких квадратов и сообразите, что является множеством их четвертых вершин.

20. Отразите одну из окружностей относительно прямой.

21. В предположении, что задача решена, отразите одну «половину» четырехугольника относительно биссектрисы.

22. Предварительно разберите, что происходит при отражении шара от борта. Для этого полезно отразить прямоугольник биллиарда относительно той стороны, которой коснется шар.

23. Отразите P относительно сторон угла.

24. Воспользуйтесь решением предыдущей задачи. Ответом является треугольник, вершины которого совпадают с основаниями высот исходного треугольника.

28. Заметьте, что каждой вершине должна соответствовать симметричная ей вершина.

30. В предположении, что задача решена, опустите на искомую прямую перпендикуляры из центров окружностей и из середины отрезка, соединяющего эти центры.

40. $\dfrac{360^\circ}{n}$.

42. $\dfrac{1}{4}\, an\, \sqrt{4R^2 - a^2}$.

43. $\dfrac{1}{2}\, anr$.

46. $\dfrac{n\,(n-3)}{2}$.

63. Разберите сначала случаи, когда вектор переноса параллелен и перпендикулярен оси симметрии.

64. Разберите, что происходит с точками оси симметрии и с центром поворота при последовательном выполнении перемещений.

65. См. указание к задаче 4.

68. Решите задачу сначала для $n = 3, 5, 7$. В случае, например, пятиугольника возьмите три последовательные точки — середины последовательных сторон искомого пятиугольника — и достройте треугольник с вершинами в этих точках до параллелограмма. Вершина этого параллелограмма должна оказаться серединой диагонали искомого пятиугольника.

71. Отразите одну из точек относительно прямой. Что произойдет, если мы сдвинем после этого одну из точек в направлении, параллельном оси симметрии, на вектор, длина которого равна $|CD|$?

74. См. указание к задаче 5.

75. См. указание к задаче 5.

77. См. задачу 4 и указания к ее решению.

81. При решении этой задачи можно воспользоваться следующим шутливым соображением: для того чтобы одеться, мы сначала надеваем рубашку, а затем пиджак, а чтобы раздеться, мы сначала снимаем пиджак, а потом снимаем рубашку. Таким образом, мы совершаем обратные «перемещения» в обратной последовательности.

82. Подумайте, выполнено ли условие а) из определения группы.

85. Для параллельных переносов, имеющих заданное направление, подумайте, выполнено ли условие б) из определения группы.

86. Разберитесь, чем является композиция $S_l \circ S_l$.

88. Запишите в виде двухстрочных таблиц преобразования $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, $f \circ f \circ f \circ f$.

Элементы математической логики

5—11. Постройте диаграммы Эйлера — Венна, иллюстрирующие соответствующие суждения.

20. Отрицаниями высказывания «Существуют четные простые числа» (это высказывание истинно) являются высказывания (ложные) «Не существуют четные простые числа» и «Любое простое число нечетно», выражающие один и тот же факт.

42. Введите обозначения, соответствующие высказываниям «Капитан присутствует на судне», «С судна выгружают груз» и «Рулевой присутствует на судне», и запишите логические выражения, соответствующие инструкции. После этого упростите их, используя подходящие эквивалентности. Итог этих упрощений — высказывание «Если с судна не выгружают груз, то рулевой обязан присутствовать вместе с капитаном».

43. Следует формализовать предложения, описывающие наблюдения друзей, и упростить полученное логическое выражение.

44. Запишите каждое сочетание в виде логического выражения (например, КЗЖ), упростите дизъюнкцию всех таких выражений, после чего рассмотрите выражение, полученное в итоге упрощения.

45. Для того чтобы составить логическое выражение, для которого задана таблица истинности, содержащая хотя бы одно «*И*», достаточно для каждого набора значений переменных, которым соответствует значение «*И*» истинного выражения, составить конъюнкцию переменных или их отрицаний так, чтобы при этих значениях переменных она была истинной. Дизъюнкция всех таких конъюнкций и будет истинным выражением.

47. Введите обозначения: A — «Выход ведет на свободу», B — «Ты лжец». Искомый вопрос X должен быть таков, чтобы за ним следовал ответ «Да» тогда и только тогда, когда выход ведет на свободу. Составьте таблицу истинности для X при различных комбинациях значений истинности A и B, постройте соответствующее таблице логическое выражение и упростите его. Возможный вариант вопроса X — «Правда ли, что этот выход ведет на свободу тогда и только тогда, когда ты — лжец?».

48. Проверку можно провести разными способами. Можно, например, воспользоваться таблицами истинности, рассматривая различные комбинации значений истинности составляющих высказываний. Можно также применить рассуждение «от противного».

59. Формализуйте задачу, введя подходящие обозначения и составив соответствующую таблицу истинности, после чего постройте схему.

63. Решите соответствующие уравнения.

82. Достаточно доказать, что множества истинности высказывательных форм, стоящих в эквивалентностях слева и справа, совпадают. Для этого удобно воспользоваться диаграммами Эйлера — Венна.

111. Представьте каждое неравенство в виде конъюнкции или дизъюнкции более простых неравенств.

Множества на координатной плоскости

7. Воспользуйтесь теоремой, обратной теореме Пифагора.

15. Введите три переменные: координаты центра окружности и неизвестный радиус. Получите систему трех уравнений и решите ее.

20. Воспользуйтесь результатом задачи 19.

25. Воспользуйтесь результатами задач 23 и 24.

33. Если окружность касается обеих осей координат, то ее центр лежит либо на прямой $y = x$, либо на прямой $y = -x$.

35. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка искомого множества. Запишите условие $\dfrac{|AM|}{|BM|} = \lambda$, упростите его. Докажите, что полученное уравнение суть уравнение окружности.

36. Воспользуйтесь решением предыдущей задачи.

40. Пусть $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, $M(x; y)$.

Тогда

$$d^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2.$$

Покажите, что d^2 минимально, когда

$$x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3); \quad y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

(выделите полный квадрат из каждого квадратного трехчлена). Остается доказать, что этими формулами задается точка пересечения медиан треугольника ABC.

45. Решите соответствующие системы уравнений.

46. Где требуется, разложите выражение в левой части на множители. Воспользуйтесь условием равенства произведения нулю.

47. Выделите полный квадрат из каждого трехчлена.

48. Таких уравнений можно написать не одно. Возможно, проще всего поступить так:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt{2 - x} \cdot \sqrt{2 - y} = 0.$$

53. Нужно разрешить приведенную систему уравнений относительно x и y.

55. В каждой из задач а) — г) необходимо записать уравнение соответствующей прямой или окружности, а затем воспользоваться формулами, задающими преобразование инверсии относительно окружности. Здесь необходимо использовать результат задачи 51.

57. Используя все три уравнения, избавьтесь от x и y.

61. Воспользуйтесь результатом решения предыдущей задачи.

66. Составьте уравнение соответствующего множества точек.

74. Воспользуйтесь результатом задачи 73.

80. При построении графиков а) — з) следует последовательно строить графики «изнутри», начиная с самого «глубокого» модуля. Например, чтобы построить график $y = ||x - 1| - 1|$, строим последовательно графики $y = x - 1$; $y = |x - 1|$; $y = |x - 1| - 1$; $y = ||x - 1| - 1|$.

81. Воспользуйтесь соображениями четности. Заметьте также, что четыре последних графика получаются сдвигом на 2 вправо из графиков четных функций.

82. При построении этих графиков следует последовательно рассматривать отрезки оси абсцисс, на которых выражения под модулями сохраняют знак. При этом от модулей можно освободиться.

Бесконечные множества

14. Поставьте в соответствие каждой точке окружность радиуса 1 с центром в этой точке.

15. Поставьте в соответствие каждому положительному числу окружность того же радиуса с центром в начале координат.

18. При решении задачи к) заметьте, что внутри каждого из «нулей» «восьмерки» можно выбрать точку с рациональными координатами, причем разным восьмеркам не могут отвечать одни и те же точки.

19. Воспользуйтесь решением задачи 16.

21. Проведите доказательно рассуждение, аналогичное приведенному в тексте.

25. Заметьте, что $0{,}99999\ldots = 1$.

27. Рассмотрите сначала множество точек, в десятичной записи которых одна первая цифра отлична от 5.

29. Один из возможных вариантов — провести всевозможные «радиусы» из центров круга и квадрата и установить соответствие между точками «одинаковых» радиусов.

30. Каждую точку куба можно задать тройкой положительных чисел. Подумайте, как «перетасовать» цифры в этих числах, чтобы получить одно число и чтобы разным тройкам отвечали разные числа.

ИБ № 1602

Наум Яковлевич Виленкин
Рафаил Самойлович Гутер
Александр Николаевич Земляков
Инна Львовна Никольская

ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС. ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ

Редактор *С. В. Пазельский*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технические редакторы *Л. Я Медведев, Н. Н. Бажанова*
Корректор *Т. Ф. Алексина*

Сдано в набор 22.03.78. Подписано к печати 04.11.78. 60×90¹/₁₆. Бум. газетная. Гарн. Литер. Печать высокая. Усл. печ. л. 12. Уч.-изд. л. 11,74. Тираж 200 000. Заказ № 8533. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц Саратовского ордена Трудового Красного Знамени полиграфического комбината в областной типографии управления издательств, полиграфии и книжной торговли Ивановского облисполкома, 153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6.